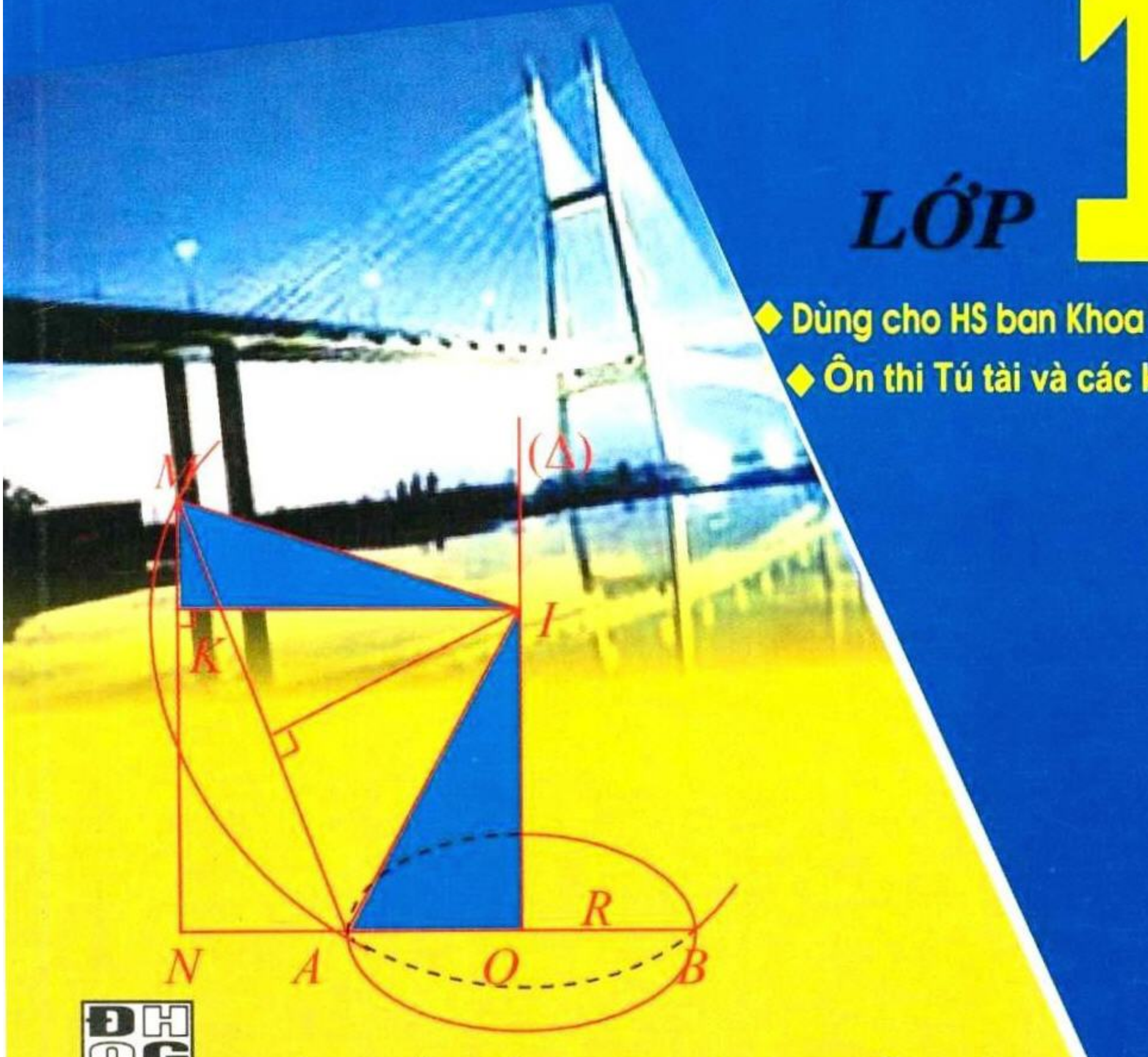
PHẠM QUỐC PHONG

(Nhà Giáo Ưu Tú)

Bồi dưỡng HÌNH HỌC

LỚP 12

- Dùng cho HS ban Khoa học Tự nhiên
- Ôn thi Tú tài và các kì thi quốc gia



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẠM QUỐC PHONG

Nhà giáo ưu tú

BỒI DƯỠNG

HÌNH HỌC 12

- ÔN LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT
  VÀ CÁC KÌ THI QUỐC GIA

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Các bạn đang cầm trong tay một trong các cuốn sách thuộc bộ sách Bồi dưỡng Toán THPT (bao gồm Bồi dưỡng Đại số 10, Bồi dưỡng Hình học 10, Bồi dưỡng Đại số & Giải tích 11, Bồi dưỡng Hình học 11, Bồi dưỡng Giải tích 12) do cùng một tác giả biên soạn.

* *

Cũng như các cuốn trước đó, ***Bồi dưỡng Hình học 12*** có những đặc điểm sau đây :

- Hệ thống thí dụ được chọn lọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tối đa các góc cạnh của mỗi phần kiến thức nhằm giúp các bạn nắm vững nội dung chương trình. Nhiều thí dụ mới mẻ, đó là *tuổi trẻ* của cuốn tài liệu.

Lời giải thí dụ không rườm rà, ngắn gọn trong khoảng 5 - 6 dòng in trong sách. Dẫn dắt tự nhiên, diễn trình theo kiểu "cầm tay chỉ việc" một cách tường minh để mọi đối tượng đều dễ tiếp nhận và hấp thu tối đa kiến thức.

- Nêu bật các *dạng* là kết quả của sự khái quát hoá *xâu chuỗi* nhiều bài toán; đưa ra các *thuật toán* giải chúng đó là điều *có được* của quyển sách này.

- Cắt nghĩa phương pháp giải, vạch rõ bản chất bài toán, bản chất lời giải, liên kết - xâu chuỗi các bài toán là vị trí của những *lời bình*.

- Sách có 3 chương được biên soạn sát đúng với kiến thức chương trình Hình học 12 của bộ GD&ĐT bắt đầu áp dụng từ năm học 2008 – 2009. Hệ thống kiến thức trình bày phù hợp với trình tự thời gian học trên lớp để học sinh tiện theo dõi. Tất cả các chứng minh nêu trong sách được khai thác từ những kiến thức cơ bản được biên soạn trong SGK.

- Sau mỗi phần, sách có hệ thống bài tập tương thích để các bạn rèn luyện và *hoàn thiện hiểu biết* của mình. Nên nhớ rằng, kiến thức chỉ trở thành *hồng cầu* trong cơ thể bạn, nếu bạn thấy mình vượt qua được các bài tập ấy. (Bạn chỉ nên sử dụng phần hướng dẫn giải bài tập ở cuối sách như là để đối chiếu kết quả, hoặc tham khảo cách giải khác, sau khi đã phát huy hết mọi nỗ lực tự giải của mình).

Mặc dù đã rất cố gắng, cuốn sách vẫn có thể còn những hạn chế và thiếu sót bởi kinh nghiệm và sự hiểu biết. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc. Mọi góp ý xin liên hệ với tác giả theo địa chỉ sau đây :

Bà Hoàng Thị Tế
Số nhà : 239, đường Nguyễn Ái Quốc, Thị xã Hồng Lĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh.
Điện thoại : 039.260713.

Hi vọng cuốn sách là tài liệu bổ ích góp phần nâng cao kiến thức cho mỗi người sử dụng nó.

Hà Tĩnh, tháng 9/2008
Tác giả
PHẠM QUỐC PHONG

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA NÓ

I. Kiến thức cần nhớ

1) • *Hình đa diện* là hình gồm hữu hạn các đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện

a) Hai đa giác hoặc không có điểm chung, hoặc có một điểm chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh chung của hai đa giác là cạnh chung của hai đa giác.

• Mỗi hình đa diện chia không gian thành hai phần : phần bên trong và phần bên ngoài.

• Hình đa diện và phần bên trong của nó gọi là một *khối đa diện.*

2) Một khối đa diện có thể *phân chia* thành các khối tứ diện.

3) Có 5 khối đa diện đều : khối tứ diện đều, khối lập phương, khối 8 mặt đều, khối 12 mặt đều, khối 20 mặt đều.

4) Công thức tính thể tích

Khối	Hộp chữ nhật	Lăng trụ	Chóp, tứ diện
Thể tích	$V = a.b.c$	$V = \mathcal{B}.h$	$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}.h$
	a, b, c là ba kích thước	$\mathcal{B}$ là diện tích đáy , còn *h* là đường cao	

5) Tỉ số thể tích

• Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các tia SA, SB, SC lấy lần lượt các điểm A', B', C' khác với điểm S. Khi đó

$$\frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

II. Ba dạng toán thường gặp

Dạng 1. Tính thể tích của khối đa diện

- Để tính thể tích của một khối, người ta có thể :
  - + Phân chia khối đã cho ra nhiều phần. Tính thể tích từng phần rồi cộng lại.
  - + Tính một phần thể tích của khối rồi suy ra thể tích toàn khối.
  - + Tạo ra một *khối phụ* chứa khối đã cho. Tính thể tích khối phụ rồi suy ra thể tích khối cần tính. (Cố nhiên thể tích khối phụ tạo ra phải thuận lợi để tính thể tích.)
- Cách vẽ hình phụ trong lời giải nhằm kết nối khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng chéo nhau thành những giả thiết "*đủ thuận lợi*" cho việc tính thể tích trong khối phụ.

Bài toán 1. Tính thể tích khối lăng trụ

Thí dụ 1. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có thể tích bằng 6. Tính thể tích của khối ABB_1C_1.

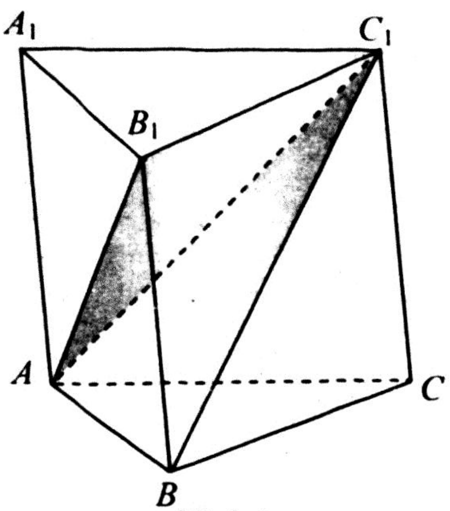
Lời giải

(h.1). Ta có $V_{ABB_1C_1} = V_{C_1.ABB_1} = V_{A.A_1B_1C_1} = V_{C_1.ABC} = V_{C_1.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = 2$

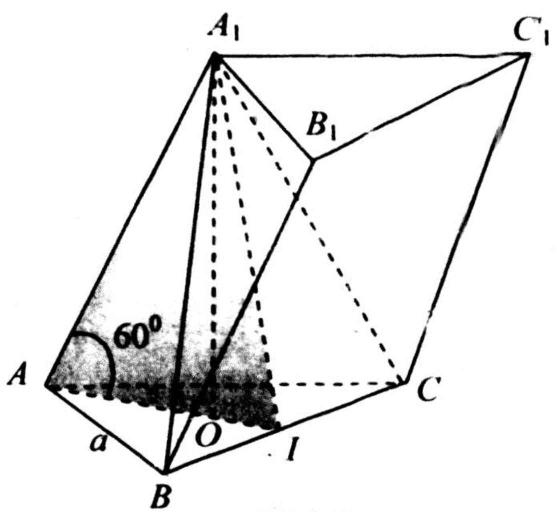
Lời bình: Từ công thức thể tích của lăng trụ và hình chóp ta có :

• Thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ thể tích lăng trụ có cùng *diện tích* đáy và chiều cao.

• Hai mặt chéo của một hình lăng trụ liền kề với một đường chéo của một mặt, chia khối lăng trụ ra ba phần có thể tích tương đương.



Hình 1



Hình 2

Thí dụ 2. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Điểm A_1 cách đều ba điểm A, B, C. Cạnh bên AA_1 tạo bởi mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lặng trụ.

Lời giải

Diện tích tam giác đều ABC là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.(h.2).

Gọi I là trung điểm BC,O là hình chiếu vuông góc của A_1 trên mặt phẳng (ABC). Theo giả thiết :

+ $A_1A = A_1B = A_1C$ suy ra $OA = OB = OC \Rightarrow O$ là trọng tâm của tam giác đều ABC $\Rightarrow O \in AI$ và $OA = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ $\widehat{A_1AO} = 60^0$.

Trong tam giác A_1OA vuông tại O, $\widehat{A} = 60^0$ ta có $A_1O = OA\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Kết luận, thể tích của khối lăng trụ là $V = S.A_1O = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Thí dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2\sqrt{3}$, $\widehat{C} = 60^0$. Đường thẳng BC_1 tạo với mặt bên (AA_1C_1C) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải .

(h.3). Ta có $ABC.A_1B_1C_1$ là lăng trụ đứng nên $A_1A \perp (ABC) \Rightarrow A_1A \perp AB$. Theo giả thiết ΔABC là tam giác vuông tại A, tức là $AB \perp BC$.

Từ các điều ấy suy ra $AB \perp (AA_1C_1C) \Rightarrow AB \perp AC$. Do vậy BC là hình chiếu vuông góc của BC_1 trên (AA_1C_1C) nên $\widehat{C_1BC}$ là góc giữa BC_1 và mặt bên (AA_1C_1C). Theo giả thiết $\widehat{BC_1A} = 30^0$.

- Trong tam giác ABC (vuông tại A, $\widehat{C} = 60^0$)

ta có $AC = AB\cot 60^0 = 2\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2.$

Diện tích ΔABC là $S = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}$

- Trong tam giác ABC_1 (vuông tại A, $\widehat{C_1} = 30^0$)

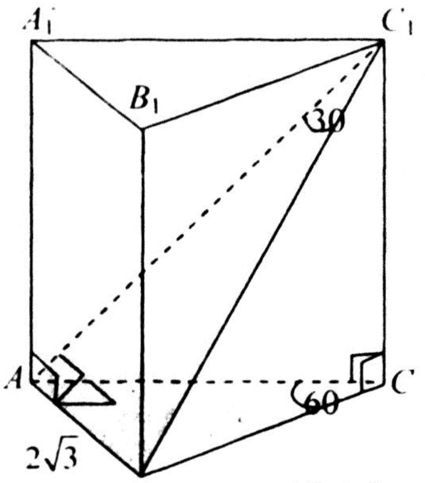
ta có $AC_1 = AB\cot 30^0 = 2\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6.$

- Trong tam giác AC_1C (vuông tại C) ta có
  $C_1C^2 = AC_1^2 - AC^2 = 6^2 - 2^2 = 32$

$\Rightarrow C_1C = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

- Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là

$V = S.C_1C = 2\sqrt{3}.4\sqrt{2} = 8\sqrt{6}.$



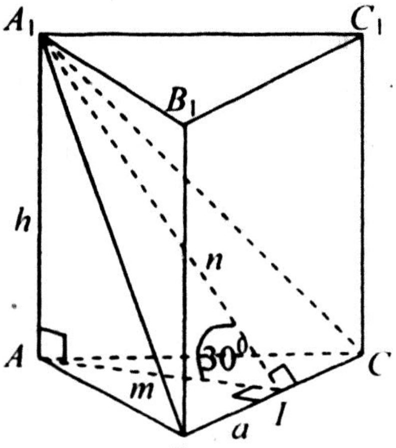
Hình 3

Thí dụ 4. Đáy của lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$. Mặt chéo (A_1BC) tạo với đáy một góc 30^0 và có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC.(h.4). Kí hiệu $A_1A = h$, $BC = a$, $IA = m$, $IA_1 = n$. Do ABC là tam giác đều suy ra $IA \perp BC$ và do đó $IA_1 \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc).

Từ các giả thiết suy ra $\widehat{A_1IA} = 30^0$.



Hình 4

Trong tam giác đều ABC ta có $m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (1)

Trong tam giác A_1AI vuông tại A và $\widehat{A_1IA} = 30^0$.

suy ra $n = \dfrac{m}{\cos 30^0} = \dfrac{2m}{\sqrt{3}} = a$, $h = m\tan 30^0 = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác A_1BC là $S_1 = BI.n = \dfrac{a.a}{2}. = \dfrac{a^2}{2}$.

Theo giả thiết $S_1 = 8 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow h = \dfrac{a}{2} = 2$

Diện tích tam giác đều ABC là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

Kết luận, thể tích hình lăng trụ cần tính là $V = S_{\Delta ABC}.h = 4\sqrt{3}.2 = 8\sqrt{3}$

Bài toán 2. Tính thể tích khối hộp

Thí dụ 5. Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình bình hành và $\widehat{BCD} = 45^0$. Các đường chéo AC_1 và DB_1 theo thứ tự lần lượt tạo với đáy một góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích của khối hộp khi chiều cao của nó bằng 2.

Lời giải

(Đường cao thì đã rõ. Vấn đề là tìm diện tích đáy)

Từ giả thiết suy các cạnh bên vuông góc với đáy và có độ dài bằng 2,

$\widehat{C_1AC} = 45^0$, $\widehat{B_1DB} = 60^0$, $\widehat{ADC} = 135^0$ (h.5).

- Trong tam giác C_1CA vuông cân tại C có $AC = C_1C = 2$.
- Trong tam giác B_1DB vuông tại B có $BD = B_1B\cot60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Áp dụng định lý hàm số cosin lần lượt vào hai tam giác ABD và CBD ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - AB.AD.2\cos45^0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = AB^2 + AD^2 - AB.AD\sqrt{2} \quad (1)$$

$$AC^2 = DC^2 + DA^2 - DC.DA.2\cos135^0$$

$$\overset{AB=DC}{\Leftrightarrow} 4 = AB^2 + DA^2 + AB.AD.\sqrt{2} \quad (2)$$

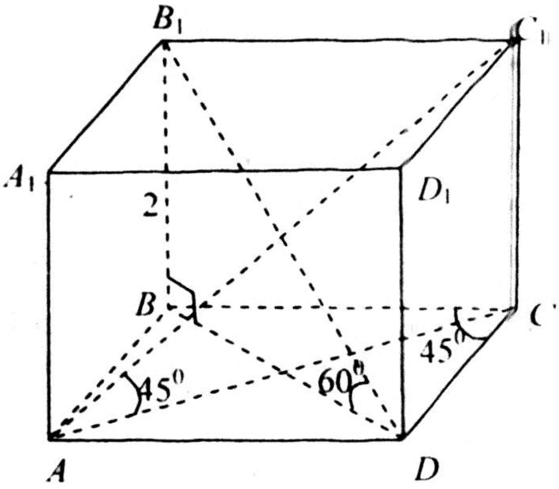
- Trừ theo từng vế các đẳng thức (2) và (1) ta có : $4 - \frac{4}{3} = 2AB.AD\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = AB.AD\sqrt{2} \Leftrightarrow AB.AD = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

- Diện tích đáy $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = AB.AD\sin45^0 = \frac{4}{3\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$

- Thể tích khối hộp là $V = S_{ABCD}.B_1B = \frac{2}{3}.2 = \frac{4}{3}$.



Hình 5

Lời bình: Bạn có thể thay thế giả thiết biết chiều cao của khối chóp bằng biết độ dài hoặc là một đường chéo hình hộp, hoặc là một đường chéo của mặt $ABCD$. Khi đó bạn có bài toán mới mà cách giải hoàn toàn tương tự.

Thí dụ 6. Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình thoi. Diện tích hai mặt chéo ACC_1A_1, BDD_1B_1 lần lượt là s_1 và s_2. Tính thể tích của khối hộp theo s_1 và s_2, biết $\widehat{BA_1D} = 90^0$.

Lời giải

- Gọi S_{ABCD} là diện tích hình thoi $ABCD$ (h.6).

Thể tích của khối chóp là $V = S_{ABCD}.A_1A$ (1)

Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} s_1 = A_1A.AC \\ s_2 = A_1A.BD \end{cases}$

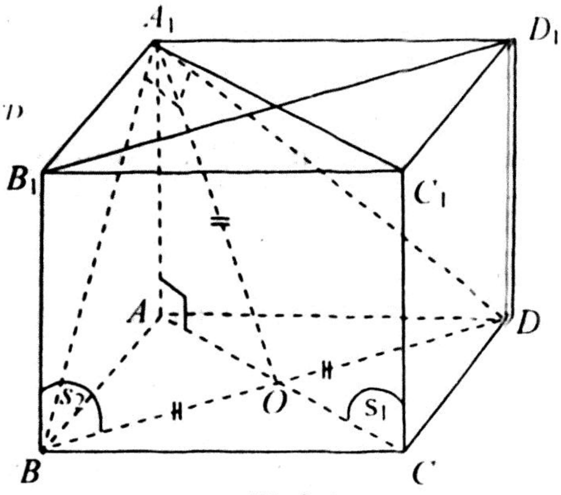
$$\Rightarrow s_1.s_2 = A_1A^2.AC.BD \Leftrightarrow s_1.s_2 = A_1A^2.2S_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{s_1.s_2}{2A_1A^2} \quad (2)$$

- Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết BA_1D là tam giác vuông tại A_1 nên:

$$OA_1 = \frac{BD}{2}.$$

Trong tam giác A_1AO vuông tại A ta có $A_1A^2 = OA_1^2 - 0A^2 = \frac{BD^2}{4} - \frac{AC^2}{4}$



Hình 6

$$\Rightarrow A_1A^4 = A_1A^2\,\frac{BD^2 - AC^2}{4} = \frac{1}{4}\left[(A_1A.BD)^2 - (A_1A.AC)^2\right] = \frac{1}{4}(s_1^2 - s_2^2)$$

$$\Rightarrow A_1A = \sqrt[4]{\frac{1}{4}(s_1^2 - s_2^2)} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) có $V = \dfrac{s_1.s_2}{2A_1A^2}.A_1A = \dfrac{s_1.s_2}{2A_1A} = \dfrac{s_1.s_2}{2\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}(s_1^2 - s_2^2)}} = \dfrac{s_1.s_2}{\sqrt[4]{4(s_1^2 - s_2^2)}}$

Bài toán 3. Tính thể tích khối chóp

Thí dụ 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có cạnh đáy bằng a và góc ở đỉnh của mỗi mặt bên bằng 2α. Tính thể tích của khối chóp ấy.

Lời giải

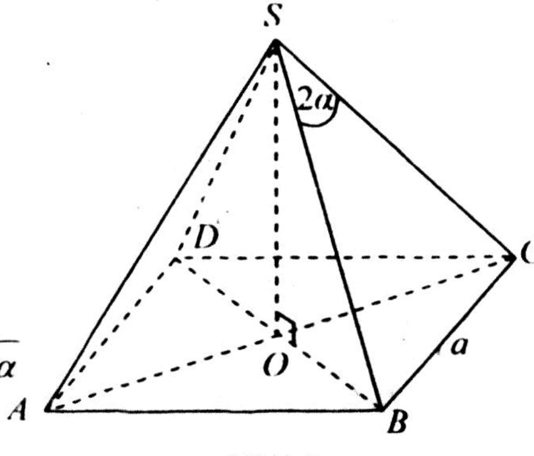
(Diện tích đáy đã rõ. Vấn đề là tìm đường cao.)

Gọi $O = AC \cap BD$. (h.7). Từ giả thiết suy ra :

+ O là tâm hình vuông $ABCD$.

+ $SO \perp (ABCD)$.

+ $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Hình 7

- Trong tam giác SBC ta có

$$\frac{SB}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} \text{ hay } \frac{SB}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow SB = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

- Trong tam giác SOB vuông tại O, ta có

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\cos 2\alpha}{4\cos^2\alpha} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}$$

- Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{a^2}{3}.\dfrac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha} = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{6\cos\alpha}$.

Lời bình: Bạn có thể thay thế giả thiết biết cạnh đáy của khối chóp bằng a bằng biết độ dài hoặc là đường cao, hoặc là cạnh bên, hoặc là một đường chéo của đáy $ABCD$. Khi đó bạn có bài toán mới mà cách giải hoàn toàn tương tự.

Thí dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài đường trung tuyến AD là a, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) một góc β. Tính thể tích khối chóp.

Lời giải

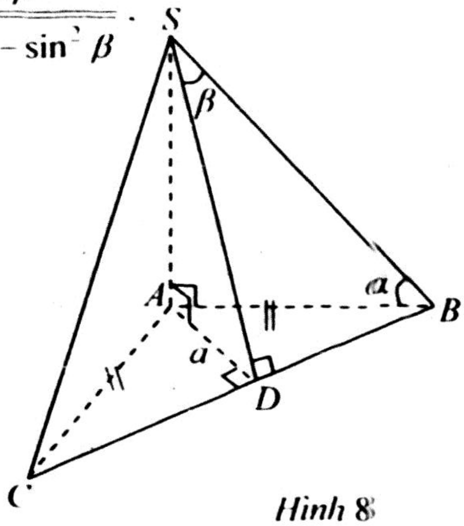
(h.8). Từ giả thiết suy ra $\widehat{SBA} = \alpha$, $SA \perp BC$. Tam giác ABC cân tại A nên $AD \perp BC$. Kết hợp với $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAD)$. Bởi thế SD là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAD) nên $\widehat{BSD} = \beta$.

Trong các tam giác vuông SAB, SAD, BAD ta có $SB = \dfrac{AB}{\cos\alpha} = \dfrac{BD}{\sin\beta}$

$$\Rightarrow SB^2=\frac{AB^2}{\cos^2\alpha}=\frac{BD^2}{\sin^2\beta}=\frac{AB^2-BD^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}=\frac{AD^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}=\frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow SB=\frac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}},\ BD=SB\sin\beta=\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}.$$

$$SA=SB\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}$$



Hình 8

Thể tích khối chóp là

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}BD.AD.SA \qquad (*)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}.a.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}$$

$$=\frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}.$$

Lời bình: Trong Thí dụ trên, $SA\perp BC$ (nghĩa là $(\widehat{SA,BC})=\alpha=90^0$) và AD là đoạn thẳng vuông góc vuông chung của cặp cạnh đối diện SA và BC. Từ (*) suy ra $V=\frac{1}{6}SA.BC.AD$ $=\frac{1}{6}SA.BC.AD\sin\alpha$. Đó là một minh hoạ của bài toán trong Thí dụ 9 sau đây :

Thí dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là khoảng cách giữa AB và CD và α là góc giữa hai hai đường thẳng đó. Chứng minh $V=\frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$

Lời giải

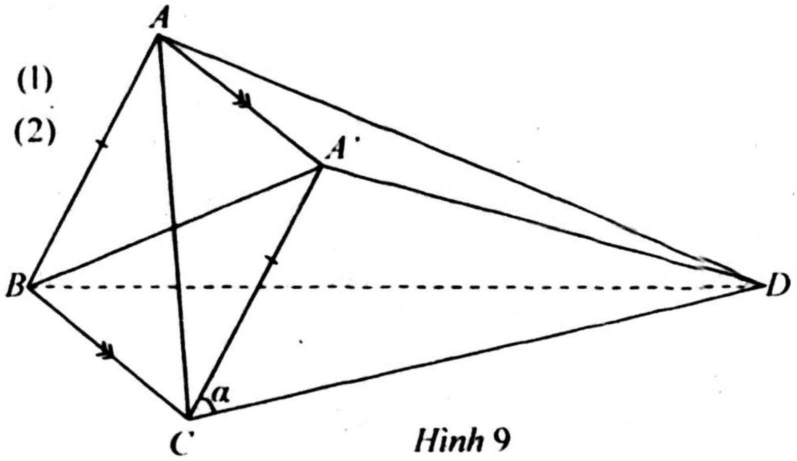
Cách 1. Vẽ hình bình hành $ABCA'$.(h.9).

Theo đó ta có $\begin{cases}AB\,//\,A'C & (1)\\ AB=A'C & (2)\end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow AB//(A'CD)$ nên suy ra :

+ $V_{ABCD}=V_{A'BCD}$

+ Khoảng cách giữa AB và CD bằng khoảng cách giữa điểm A và $(A'CD)$ và bằng d.



Hình 9

+ $\widehat{A'CD}=\alpha$ hoặc $\widehat{A'CD}=\pi-\alpha$.

Do vậy $s_{A'BC}=\frac{1}{2}A'B.CD.\sin\alpha=\frac{1}{2}AB.CD.\sin\alpha$

Xem tứ diện $A'BCD$ là khối chóp có đỉnh A' và đáy là ΔBCD. Ta có:

$$V_{A'BCD}=\frac{1}{3}s_{A'BC}.d=\frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha.$$

Vậy $V_{ABCD} = V_{EBCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$ (đpcm)

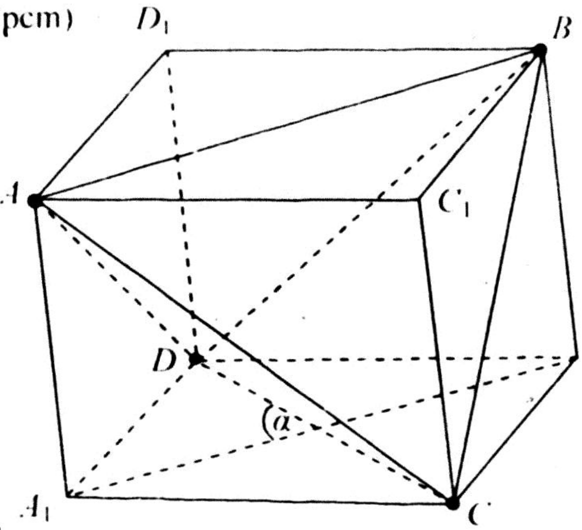
Cách 2. (h.10).

Dựng hình hộp $AC_1BD_1.DA_1CB_1D$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.Khi đó (AC_1BD_1) // (DA_1CB_1D) nên khoảng cách giữa AB và CD cũng là khoảng cách giữa (AC_1BD_1) và (DA_1CB_1D) tức là hình hộp tạo ra có đường cao bằng d. Do AB // A_1B_1 nên từ giả thiết suy ra

$(\widehat{AB,CD}) = (\widehat{A_1B_1,CD}) = \alpha$

Rõ ràng diện tích đáy DA_1CB_1D là

$$s_{DA_1CB_1} = \frac{1}{2}A_1B_1.CD.\sin\alpha = \frac{1}{2}AB.CD.\sin\alpha$$



Hình 10

$$V_{hộp} = s_{DA_1CB_1}.d = \frac{1}{2}AB.CD.d.\sin\alpha. \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{hộp} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha \text{ (đpcm)}$$

Lời bình: Trong cả hai cách giải trên đều sử dụng phương pháp vẽ *khối phụ* .(Tạo ra một chứa *khối phụ* khối đã cho. Tính thể tích khối phụ rồi suy ra thể tích khối cần tính.) Cách vẽ hình phụ trong lời giải đã kết nối thành công khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng chéo nhau thành những giả thiết *"đủ thuận lợi"* cho việc tính thể tích trong khối phụ.

Thí dụ 10. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau :

$$AB = CD = a,\ AC = BD = b,\ AD = BC = c.$$

Lời giải

(h.11).Trong mặt phẳng (BCD) vẽ $\Delta B_1C_1D_1$ sao cho B, C, D theo thứ tự là trung điểm C_1D_1, D_1B_1, B_1C_1. Xét khối tứ diện $AB_1C_1D_1$

Theo giả thiết $c = AD = BC$ (1)

Lại có $BC = \frac{1}{2}C_1B_1$ (đường trung bình của tam giác) (2)

Từ (1), (2) suy ra $AD = \frac{1}{2}C_1B_1$ nên ΔAB_1C_1 là tam giác vuông tại A hay $AC_1 \perp AB_1$.

Tương tự cũng có $AB_1 \perp AD_1$, $AD_1 \perp AC_1$

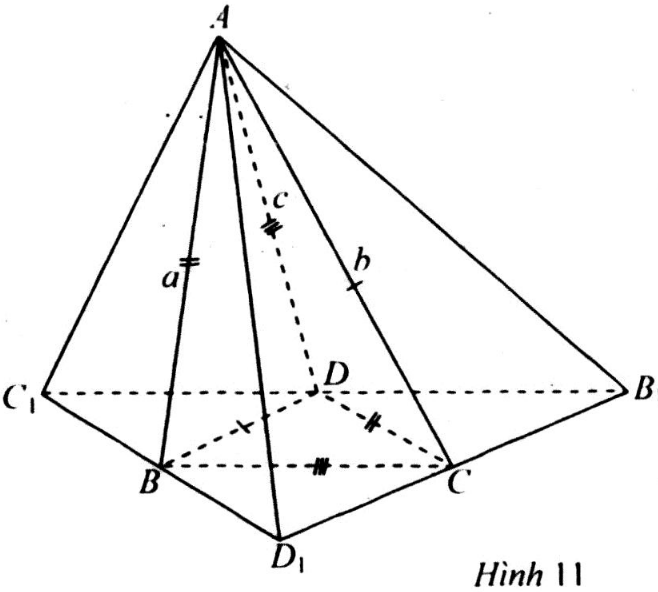
Theo cách vẽ ta có $s_{BCD} = \frac{1}{4}s_{B_1C_1D_1}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AB_1C_1D_1}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{6}AB_1.AC_1.AD_1 \quad (3)$$

Trong các tam giác vuông B_1AC_1, C_1AD_1, D_1AB_1 ta có:

$$\begin{cases} AB_1^2 + AC_1^2 = B_1C_1^2 = 4c^2 & (4) \\ AB_1^2 + AD_1^2 = B_1D_1^2 = 4b^2 & (5) \\ AC_1^2 + AD_1^2 = C_1D_1^2 = 4a^2 & (6) \end{cases}$$



Hình 11

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên suy ra $AB_1^2 + AC_1^2 + AD_1^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ (7)

Hiệu của (7) với mỗi đẳng thức (4), (5), (6) cho :

$AB_1 = \sqrt{2(c^2 + b^2 - a^2)}$, $AC_1 = \sqrt{2(c^2 + a^2 - b^2)}$, $AD_1 = \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)}$

Thay các kết quả vừa tính được vào (3) có :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{24}\sqrt{2(c^2 + b^2 - a^2).2(c^2 + a^2 - b^2).2(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\Leftrightarrow V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \qquad (*)$$

Lời bình: Tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau được gọi là tứ diện gần đều. Khi $a = b = c$ công thức (*) trở thành $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. Đó là công thức tính thể tích của tứ diện đều cạnh a.

Dạng 2. Tìm tỉ số thể tích của hai khối đa diện

Bổ đề. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các tia SA, SB, SC lấy lần lượt các điểm A', B', C'' khác với điểm S. Khi đó

$$\frac{V(S.A'B'C'')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC''}{SC}$$

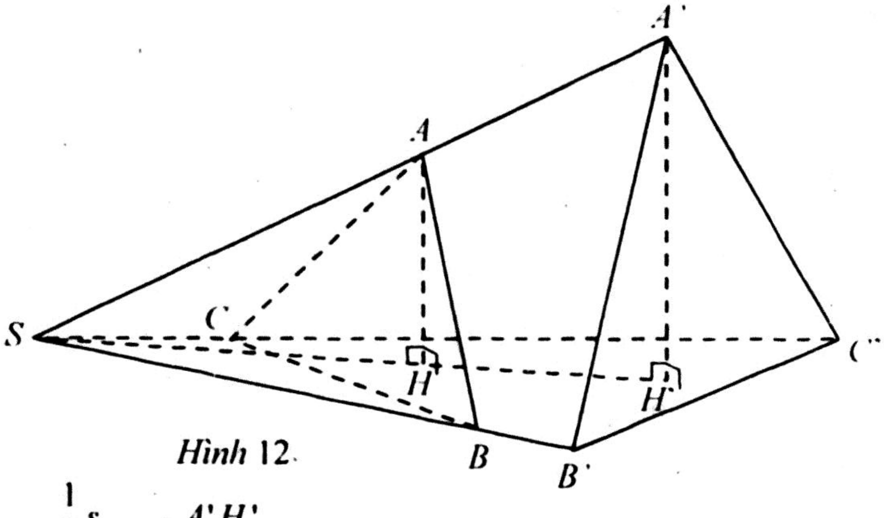
Lời giải

(h.12) .Gọi $s_{\Delta SAB}, s_{\Delta SA'B'}$ theo thứ tự là diện tích tam giác SAB và $SA'B'$.

$$\text{Ta có } \frac{s_{\Delta SB'C''}}{s_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{1}{2}SB'.SC''.\sin\widehat{B'SC''}}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{BSC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC''}{SC} \qquad (1)$$

Gọi H, H' theo thứ tự là hình chiếu của A, A' trên mặt phẳng (BSC).

Từ các tam giác vuông đồng dạng SAH và $SA'H'$ ta có $\frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA}$ (2)



Hình 12.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AB'C''}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}s_{\Delta SB'C''}.A'H'}{\frac{1}{3}s_{\Delta SBC}.AH} \qquad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3) ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ (đpcm)

Lời nhắn: Trong các bài toán tính toán về tỉ số thể tích, các bạn được sử dụng bổ đề này.

Thí dụ 11. Cho khối chóp S.*ABCD* có đáy là hình bình hành. Gọi *B*', *D*' theo thứ tự là trung điểm của *SB*, *SD*. Mặt phẳng (*AB*'*D*') cắt *SC* tại *C*'. Tìm thể tích hai khối chóp *S.AB*'*C*'*D*' và S.*ABCD*.

Lời giải

(h.13) Trong mặt phẳng (*ABCD*), lấy $O = AC \cap BD$.

Nối *B*'*D*'. Trong mặt phẳng (*SBD*), lấy $I = SO \cap B'D'$.

Trong mặt phẳng (*SAC*), từ *A*, *O* lần lượt kẻ các đường thẳng song song với *AI* cắt *SC* theo thứ tự tại *C*', *O*'.

Ta thấy *B*'*D*' là đường trung bình của tam giác *SBD* nên suy ra *B*'*D*'//*BD*, vì thế có *I* là trung điểm của *SO*. Ta cũng có *O* là trung điểm *AC*.

Theo tính chất các đường thẳng song song ta có *C*', *O*' theo thứ tự là trung điểm của *SO*', *C*'*C*.

Từ đó suy ra $SC' = C'O' = O'C$,

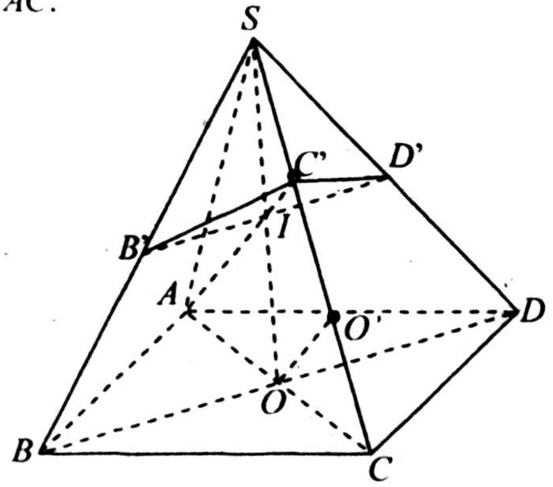
bởi thế có $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$

Dễ thấy $V_{SABCD} = 2V_{SAB'C'D'}$ (1)

Ta có

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Kết hợp với (1) suy ra $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$



Hình 13

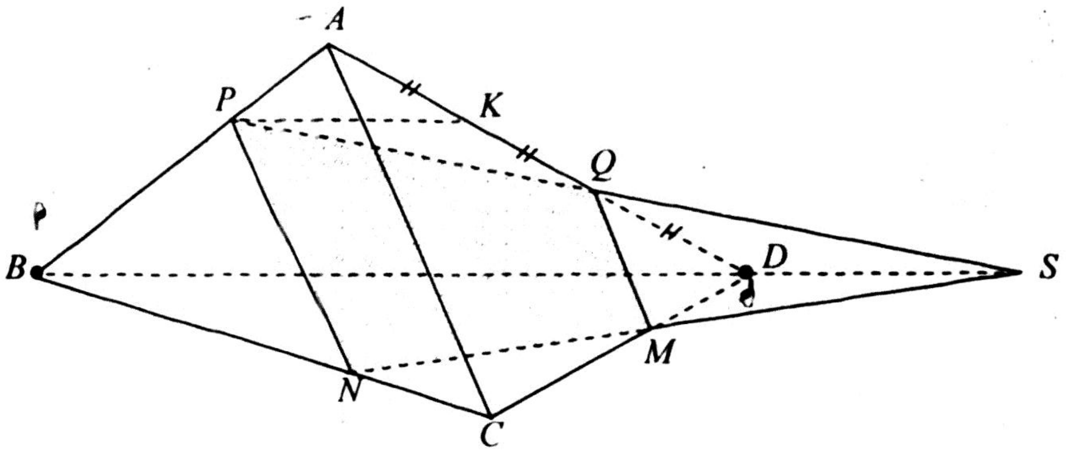
Tương tự $\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$. Do vậy $\frac{V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1+1}{12} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$.

Lời nhắn: Không có công thức tỉ số thể tích của hai hình chóp đáy không phải là tam giác.

Thí dụ 12. Cho khối tứ diện *ABCD*. Gọi *P*, *Q* theo thứ tự là các điểm thuộc *AB*, *AD* thoả mãn $2AP = PA$, $AQ = 2QC$. Mặt phẳng (α) qua *PQ* chia khối tứ diện ra hai phần. Tìm tỉ số thể tích hai phần ấy.

Lời giải

Gọi *V* là thể tích của khối tứ diện *ABCD*, V_1 là thể tích của khối *BPQMN*.



Hình 14

Rõ ràng $V_1 = V_{BSPN} - V_{DSQM}$.(h.14)

Gọi điểm K của đoạn thẳng AQ. Từ giả thiết suy ra :

+ $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{PK}{BD} = \dfrac{1}{3}$, và $PK \,//\, BS$.

+ Q là trung điểm KD, kết hợp với $PK \,//\, BS$ suy ra DS PK, kết hợp với $\dfrac{PK}{BD} = \dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{BS}{BD} = \dfrac{4}{3}$.

Xét hai khối tứ diện $B.SPN$ và $B.DAC$ ta có

$$\frac{V_{BSPN}}{V} = \frac{V_{BSPN}}{V_{BDAC}} = \frac{BS}{BD}.\frac{BP}{BA}.\frac{BN}{BC}. = \frac{4}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{16}{27} \qquad (1)$$

Xét hai khối tứ diện $S.DQM$ và $S.BPN$ ta có

$$\frac{V_{DSQM}}{V} = \frac{V_{DSQM}}{V_{DBAC}} = \frac{DS}{DB}.\frac{DQ}{DA}.\frac{DM}{DC}. = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \qquad (2)$$

Trừ theo từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta có

$$\frac{V_{BSPN} - V_{DSQM}}{V} = \frac{16}{27} - \frac{1}{27} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{5}{9-5} = \frac{5}{4}$$

Vậy tỉ số thể tích của hai khối do mặt phẳng (α) chia tứ diện $ABCD$ tạo thành bằng $\dfrac{5}{4}$.

Thí dụ 13. Cho khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, CD. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần của khối hộp do mặt phẳng (AMN) chia ra.

Lời giải

(h.15). Kí hiệu (MN) là đường thẳng MN. Gọi :

+ $J = (MN) \cap (AD)$.

$I = (MN) \cap (AC)$.

$K = (A_1J) \cap (AD)$.

$L = (B_1B) \cap (AC)$.

+ V là thể tích khối $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, V_0 là thể tích khối $A_1.ABD$.

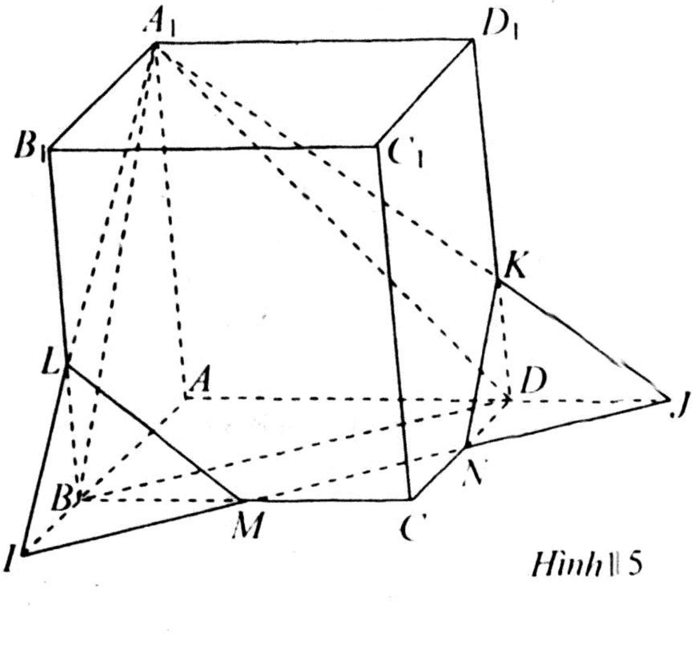
+ Mặt phẳng (AMN) chia khối hộp ra 2 phần, thể tích điểm A kí hiệu là V_A, phần còn lại kí hiệu là V_{C_1}

+ V_1 là thể tích khối tứ diện AA_1IJ

+ V_{11} là thể tích khối $J.KDN$

+ V_{12} là thể tích khối $J.KDN$

Từ các giả thiết M, N là trung điểm các cạnh chứa nó, kết hợp với tính chất các đường thẳng song song, dễ dàng suy ra



Hình 15

- $BM = DJ$, $IB = ND$. $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IL}{IA_1} = \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{3}{2}$.

- Dễ thấy $\dfrac{V_0}{V} = \dfrac{1}{6}$ (1)

(*suy từ thể tích hình chóp bằng* $\frac{1}{3}$ *thể tích hình hộp có cùngdiện tích đáy và chiều cao*)

Ta có $\frac{V_1}{V_0} = \frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{1} = \frac{9}{4}$. (2)

$\frac{V_{11}}{V_1} = \frac{V_{12}}{V_1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{V_1 - 2V_{11}}{V_1} = \frac{27-2}{27} = \frac{25}{27}$ hay $\frac{V_A}{V_1} = \frac{25}{27}$ (3)

Nhân theo từng vế các đăng thức (1), (2) và (3) ta có

$\frac{V_0}{V}.\frac{V_1}{V_0}.\frac{V_A}{V_1} = \frac{1}{6}.\frac{9}{4}.\frac{25}{27} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V} = \frac{25}{72} \Rightarrow \frac{V_A}{V - V_A} = \frac{25}{72-25}$ hay $\frac{V_A}{V_{C1}} = \frac{25}{47}$.

Lời bình: Bạn có thể gán cho các kích thước của hình hộp là a, b, c. Tính trực tiếp các thể tích của mỗi phần do mặt phẳng (AMN) chia ra. Từ đó so sánh các thể tích ấy. Tuy nhiên bài toán về tỉ số thể tích không phụ thuộc đơn vị đo, đó là cách giải thích sự trình bày lời giải theo cách trên (người ta nói đó là lời giải afin)

Dạng 3. Giải bài toán hình học bằng phương pháp thể tích

Để tính một đại lượng hình học nào đó bằng phương pháp thể tích, người ta làm như sau :

- Đưa đại lượng cần tính gắn vào biểu thức tính thể tích của một khối nào đó.
- Dùng cách khác để tính thể tích của khối ấy.
- So sánh hai kết quả của thể tích để rút ra giá trị đại lượng cần tìm.

Phương pháp thể tích thường được dùng để tính các yếu tố về khoảng cách, diện tích hoặc chứng minh một hệ thức nào đó.

Thí dụ 14 (Tính khoảng cách)
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $A_1A = AB = a$, $BC = 2a$. Điểm M thuộc cạnh AD với $AM = 3MD$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB_1C).

Lời giải

(h.16). Ta lại có $V_{B_1.AMC} = \frac{h}{3} S_{\Delta AB_1C}$ (1)

Mặt khác $V_{B_1.AMC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AM.AB.B_1B = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.a.a = \frac{a^3}{4}$ (2)

Gọi khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB_1C) là h.

Gọi I là trung điểm B_1A. Từ tam giác vuông cân B_1AB ta suy ra $AI^2 = \frac{a^2}{2}$.

Từ tam giác cân CB_1A ta suy ra $IC \perp B_1A$.
Bởi thế

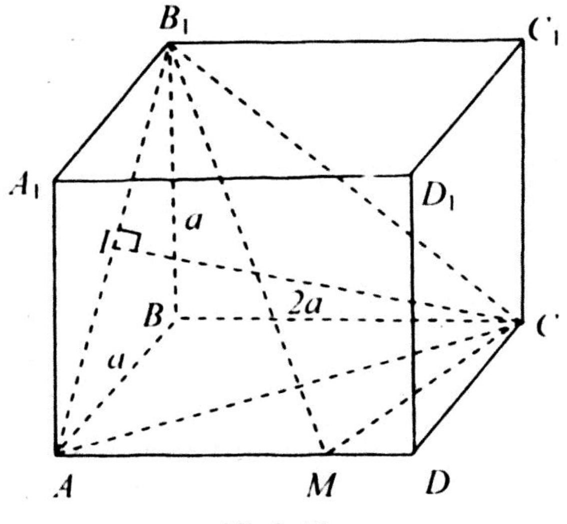
$$IC^2 = AC^2 - AI^2 = B_1A^2 + BC^2 - AI^2$$
$$= a^2 + (2a)^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{9a^2}{2} \Rightarrow IC = \frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

Từ đó diện tích tam giác CB_1A là:

$$S_{\Delta CB_1A} = AI.IC = \frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

Thay (1), (2) vào (3) ta có:

$$\frac{a^3}{4} = \frac{h}{3}.\frac{3a^2}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}.$$



Hình 16

Lời bình: Việc nhận biết diện tích ΔCB_1A thật chóng vánh. Đã một lần ta biết đến (it ra là *Phạm Quốc Phong – Bồi dưỡng Hình học* 11, trang 72) : Trong một tứ diện vuông, bình phương diện tích mặt huyền bằng tổng bình phương các mặt vuông. Theo đó :

$$S^2_{\Delta CB_1A} = S^2_{\Delta B_1BA} + S^2_{\Delta B_1BC} + S^2_{\Delta ABC} = \frac{a^4}{4} + a^4 + a^4 = \frac{3a^4}{4} \Rightarrow S_{\Delta CB_1A} = \frac{3a^2}{2}.$$

Thí dụ 15 (Tính diện tích)

Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = b$, $A_1A = c$ ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với A_1C.

1) Dựng diện của lăng trụ tạo bởi mặt phẳng (P).

2) Tính diện tích thiết diện nói trên.

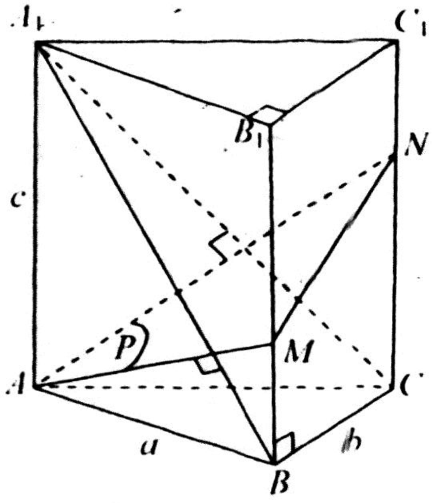
Lời giải

1) (h.17). Trong mặt phẳng (A_1C_1AC), qua A kẻ đường thẳng vuông góc với A_1C cắt C_1C tại N. (Bởi có $AC = \sqrt{a^2 + b^2} \leq c$ nên N thuộc đoạn C_1C).

Gọi $M = (P) \cap B_1B$. Dễ thấy $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp A_1C \end{cases}$

$\Rightarrow AM \perp (A_1BC) \Rightarrow AM \perp A_1B$.

Vậy M là giao của B_1B với đường thẳng vuông góc với A_1B kẻ A trong mặt phẳng (A_1B_1AB). Thiết diện là tam giác AMN.



Hình 17

2) (h.18). Ta có $V_{A_1.AMN} = \frac{1}{3} S_{\Delta AMN}.A_1I$

$$\Leftrightarrow \quad S_{\Delta AMN} = \frac{3V_{A_1.AMN}}{A_1I} \qquad (1)$$

Lại có $V_{A_1.AMN} = V_{N.A_1AM} = V_{C.A_1AM} =$

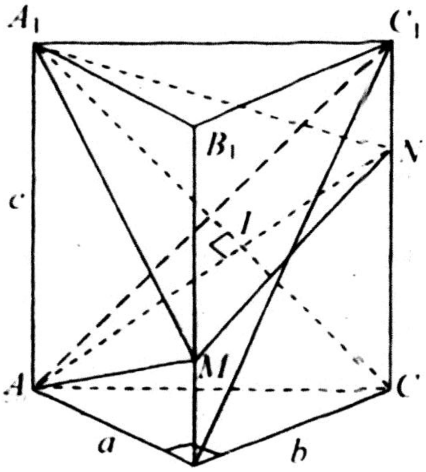
$$= V_{M.A_1AC} = V_{B.A_1AC} = V_{A_1.BAC} = \frac{abc}{6} \qquad (2)$$

Trong tam giác A_1AC vuông tại A, ta có $A_1A^2 = A_1I.A_1C$

$\Leftrightarrow c^2 = A_1I\sqrt{A_1A^2 + AC^2}$

$\Leftrightarrow c^2 = A_1I\sqrt{c^2 + AB^2 + BC^2}$

$\Leftrightarrow c^2 = A_1I\sqrt{c^2 + a^2 + b^2} \Leftrightarrow A_1I = \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (3)$



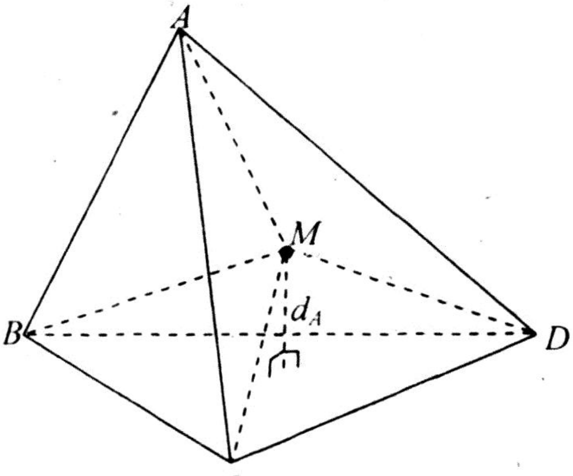
Hình 18

Thay (2), (3) vào (1) có $S_{\Delta AMN} = \dfrac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}$. Đó là kết quả của bài toán.

Thí dụ 16 (Chứng minh hệ thức)

Chứng minh tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tứ diện đều đến các mặt của tứ diện ấy là một số hằng.

Lời giải



Hình 19

(h.19). Gọi M là một điểm bất kì trong tứ diện đều $ABCD$. Gọi d_A, d_B, d_C, d_D theo thứ tự là khoảng cách từ điểm M đến các mặt (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Gọi S là diện tích của của mỗi mặt bên. Ta có thể tích của tứ diện $MBCD$ là $V_{MBCD} = \frac{1}{3}d_A.S$

Tương tự $V_{MACD} = \frac{1}{3}d_B.S$

$$V_{MABD} = \frac{1}{3}d_C.S$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}d_C.S$$

Suy ra $V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = \frac{S}{3}(d_A + d_B + d_C + d_D)$

$$\Leftrightarrow V_{ABCD} = \frac{S}{3}(d_A + d_B + d_C + d_D) \Leftrightarrow d_A + d_B + d_C + d_D = \frac{3V_{ABCD}}{S} \qquad (*)$$

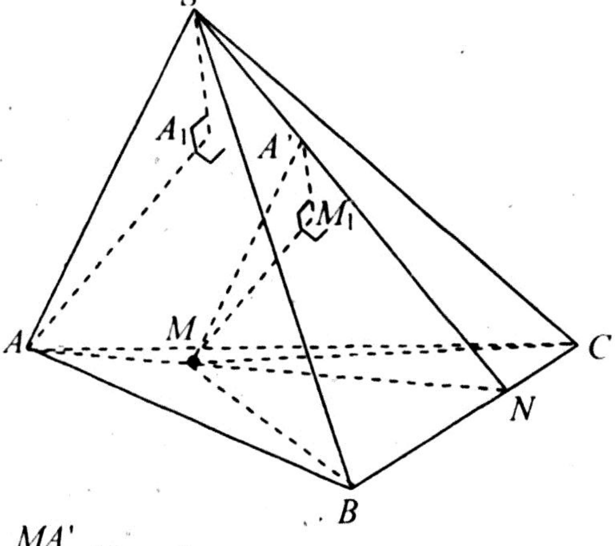
Cố nhiên $\frac{3V_{ABCD}}{S}$ là đại lượng không đổi, nên (*) cho ta có điều phải chứng minh.

Lời bình: Khi một đại lượng nào đó là một số hằng, như dòng nước chảy tự nhiên – thay cho yêu cầu chứng minh, người ta yêu cầu tính giá trị của đại lượng ấy. Các bạn theo dõi tiếp thí dụ dưới đây.

Thí dụ 17. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC lần lượt cắt các mặt (BSC), (CSA), (ASB) tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

a) $\frac{V_{M.BSC}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA}$; b) Tính tổng $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$.

Lời giải



a) (h.20) Gọi $N = MA \cap BC$. Nối SN. Do $MA' // SA \Rightarrow A' \in SN$. Gọi M_1, A_1 theo thứ tự là hình chiếu của M, A trên mặt phẳng (BSC). Từ các cặp tam giác đồng dạng ΔNAS và $\Delta NMA'$, ΔA_1AS và $\Delta M_1MA'$ ta có :

$$\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA}. \qquad (1)$$

Vậy $\frac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{M.BCS}}{V_{A.BCS}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta BCS}.MM_1}{\frac{1}{3}S_{\Delta BCS}.AA_1}$

$= \frac{MM_1}{AA_1} \overset{(1)}{=} \frac{MA'}{SA}$ hay $\frac{V_{M.BSC}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA}$ (đpcm)

Hình 20

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2274

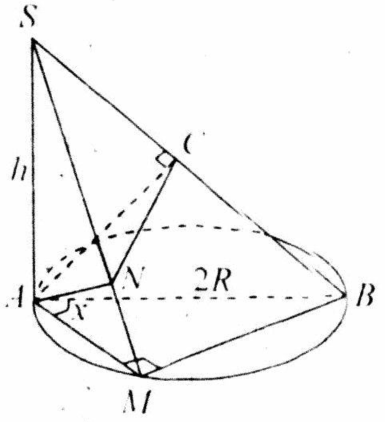
b) Chứng minh tương tự câu a) ta có $\dfrac{V_{M.CAS}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{MB'}{SB}$. $\dfrac{V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{MC'}{SC}$

Do vậy $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{V_{M.BSC}}{V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{M.CAS}}{V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABC}} = 1$

Thí dụ 18. Cho đường tròn O đường kính AB cố định. M là một điểm thay đổi trên đường tròn. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB cắt SB tại C, cắt SM tại N. Gọi $\widehat{BAM} = x$. Tính thể tích hai khối $SABM$ và $SACN$, biết $SA = h$.

Lời giải

Cách 1. Gọi $AB = 2R$. (h.21)



Hình 21

Ta có $\dfrac{V_{SANC}}{V_{SAMB}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SN}{SM}.\dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SN}{SM}.\dfrac{SC}{SB}$ (1)

Trong các tam giác ABM vuông tại M, $\widehat{BAM} = x$ ta có $MA = 2R\cos x$.

Trong các tam giác SAB, SAM vuông tại A ta có

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = h^2 + 4R^2$,

$SM^2 = SA^2 + AM^2 = h^2 + 4R^2\cos^2 x$ (2)

$SA^2 = SC.SB = SN.SM \Rightarrow SA^4 = SC.SB.SN.SM$

$$\Rightarrow \frac{SN.SC}{SM.SB} = \frac{SA^4}{SM^2.SB^2} \overset{(2)}{=} \frac{h^4}{(h^2 + 4R^2\cos^2 x)(h^2 + 4R^2)}$$

Thay vào (1) ta có $\dfrac{V_{SANC}}{V_{SAMB}} = \dfrac{h^4}{(h^2 + 4R^2\cos^2 x)(h^2 + 4R^2)}$

Cách 2. Ta có thể tích khối chóp $SAMB$ là

$$V_{SAMB} = \frac{1}{6}SA.AM.MB = \frac{1}{6}h.2R\sin x.2R\cos x.$$

Dễ thấy $MB \perp (SAM) \Rightarrow MB \perp AN$. Từ $SC \perp (ANC) \Rightarrow SC \perp AN$ (3)

Từ (3), (4) suy ra $AN \perp (SMB) \Rightarrow \begin{cases} AN \perp NC \\ AN \perp NB \end{cases} \Rightarrow V_{SANC} = \dfrac{1}{6}SC.AN.NB$ (4)

- Trong các tam giác vuông SAM và SAB ta có $\dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2}$

$$= \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4R^2\cos^2 x} = \frac{h^2 + 4R^2\cos^2 x}{4R^2h^2\cos^2 x} \Leftrightarrow AN = \frac{2Rh\cos x}{\sqrt{h^2 + 4R^2\cos^2 x}}; \quad (5)$$

$$SA^2 = SN.SM = SC.SB \Rightarrow \left[\begin{array}{l} SN = \dfrac{SA^2}{SM} = \dfrac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4R^2\cos^2 x}} \\ SC = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \end{array}\right.$$

- Trong hai tam giác vuông đồng dạng SCN và SMB ta có $\dfrac{NC}{BM} = \dfrac{SN}{SB}$

$$\Rightarrow NC = \frac{BM}{SB}.SN = \frac{2R\sin x}{\sqrt{h^2 + 4R^2\cos^2 x}}.\frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4R^2\cos^2 x}} = \frac{2Rh^2\sin x}{h^2 + 4R^2\cos^2 x}. \quad (6)$$

Thay (5), (6) vào (4) ta có

$$V_{SANC} = \frac{1}{6}.\frac{h^2}{\sqrt{h^2+4R^2}}.\frac{2Rh\cos x}{\sqrt{h^2+4R^2\cos^2 x}}.\frac{2Rh^2\sin x}{\sqrt{h^2+4R^2}\sqrt{h^2+4R^2\cos^2 x}}$$

$$= \frac{h^2.2Rh\cos x.2Rh^2\sin x}{(h^2+4R^2)(h^2+4R^2\cos^2 x)} \qquad (7)$$

Từ (3), (7) suy ra $\dfrac{V_{SANC}}{V_{SAMB}} = \dfrac{h^4}{(h^2+4R^2\cos^2 x)(h^2+4R^2)}$

BÀI TẬP 1

Khối lăng trụ

1.1. *(TSĐH, khối D – 2008):*

Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

1) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$

2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B_1C.

1.2. Chứng minh thể tích khối lăng trụ *cụt* tam giác (lăng trụ có hai đáy không song song với nhau) bằng tích của thiết diện thẳng với trung bình cộng của ba cạnh.

1.3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Các mặt phẳng (ABC_1), (AB_1C), (A_1BC) cắt nhau tại O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC).

1) Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác ABC.

2) Tính thể tích tứ diện $OABC$ theo thể tích lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.

1.4. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ có các cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của BC, I là tâm của mặt bên $(CC'D'D)$.

1) Xác định thiết diện của hình lập phương tạo bởi mặt phẳng (AKI)

2) Tính thể tích các khối đa diện do mặt phẳng (AKI) chia ra trên hình lập phương.

1.5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$, đường chéo $A_1C = d$ hợp với đáy $ABCD$ một góc α và hợp với mặt bên (BCC_1B_1) một góc β.

1) Chứng minh $\widehat{CAC_1} = \alpha$, $\widehat{AC_1B} = \beta$. 2) Tính theo α và β thể tích của khối hộp.đã cho.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của V.

Khối chóp

1.6. Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết cạnh đáy bằng a, góc $\widehat{ASB} = \alpha$.

1.7. Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết trung đoạn bằng d, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α.

1.8. Biết thể tích của khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ bằng V. Tính thể tích khối tứ diện A_1B_1CD.

1.9. *(TSĐH, khối A – 2008):*

Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của điểm điểm A_1 trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC.

1) Tính theo a thể tích khối chóp $A_1.ABC$.

2) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1.

1.10. *(TSĐH, khối B – 2008):*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.

1) Tính theo a thể tích khối chóp $S.BMDN$

2) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

1.11. Cho khối tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a$. Góc giữa mặt bên và cạnh đáy bằng x.

1) Tính thể tích của khối chóp theo a và x.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích ấy.

1.12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$

1.13. Cho (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau, hợp với nhau một góc 60^0 và khoảng cách giữa chúng bằng h. Trên đường thẳng (Δ) đặt đoạn thẳng $AB = a$, trên đường thẳng (Δ') đặt đoạn thẳng $CD = c$.

1) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

2) Giả sử BC vuông góc với CD và $BC = b$. Hãy tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

Tỉ số thể tích

1.14. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Qua trung điểm cạnh AB, AD, và SC vẽ một mặt phẳng. Tính tỉ số thể tích hai khối nhận được. (TTSĐH, khối A–1971)

1.15. Cho khối tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại B', C', D'. Biết rằng $AB = a$, $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

1) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

2) Tính thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$.

1.16. Cho khối tứ giác đều $S.ABCD$ đáy có cạnh đáy bằng a và cạnh bên nghiêng trên đáy một góc 60^0. Từ một điểm I trên đường cao SH sao cho $2SI = IH$, kẻ một mặt phẳng vuông góc với một cạnh bên. Tính tỉ số thể tích hai khối nhận được.

1.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh SA vuông góc với đáy. Một mặt phẳng (α) qua A vuông góc với cạnh SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

1) Chứng minh tứ giác $AB'C'D'$ có hai góc đối diện vuông.

2) Chứng minh rằng khi S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A thì mặt phẳng $(AB'C'D')$ luôn đi qua một đường thẳng cố định và các điểm A, B, B', C', D' cùng cách đều một một điểm cố định với một khoảng cách không đổi.

3) Giả sử góc giữa cạnh SC và mặt bên (SAB) bằng x. Tính tỉ số của khối chóp $S.AB'C'D'$ và khối chóp $S.ABCD$ theo x, biết rằng $AB = BC$.

Phương pháp thể tích:

1.18. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, $\widehat{ABC} = 90^0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (DBC) nếu $AD = a$, $AB = b$, $BC = b$.

1.19. Cho tứ diện $ABCD$ và O là một điểm nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D theo thứ tự là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} + \dfrac{1}{h_D}$

1.20. Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm nằm trong tứ diện .Gọi d_A, d_B, d_C, d_D, theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các mặt đối diện lần lượt với các đỉnh A, B, C, D. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D theo thứ tự là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện với các đỉnh ấy. Tính tổng: $\dfrac{d_A}{h_A} + \dfrac{d_B}{h_B} + \dfrac{d_C}{h_C} + \dfrac{d_D}{h_D}$

1.21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC theo thứ tự tại A', B', C', D'. Chứng minh:

a) $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$　　b) $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

1.22. Cho hình chóp $S.ABC$ và G là trọng tâm ΔABC. Một mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC, SG theo thứ tự tại A', B', C', G'. Chứng minh: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SC}{SC'} = 3\dfrac{SG}{SG'}$.

Bài tập trắc nghiệm

11.1. Cho hình chóp S.$ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình thoi cạnh a $(a > 0)$, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của đáy và $SB = a$. Hình chóp ấy có thể tích là :

A. $\dfrac{a^3}{4}$;　B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$;　C. $\dfrac{a^3}{6}$;　D. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

11.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AA' = 1$, $AB = 2$, $AD = 3$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ là :

A. $\dfrac{7}{6}$;　B. $\dfrac{49}{36}$;　C. $\dfrac{6}{7}$;　D. $\dfrac{9}{13}$.

11.3. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi D là trung điểm $A'C'$, k là tỉ số thể tích khối tứ diện $AB'D$ và khối lăng trụ đã cho. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị đúng của k ?

A. $\dfrac{1}{4}$;　B. $\dfrac{1}{12}$;　C. $\dfrac{1}{3}$;　D. $\dfrac{1}{6}$.

11.4. Cho tứ diện $ABCD$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B; $AD \perp (ABC)$; $AB = 3a$, $AC = 5a$, $AD = BC = 4a$ $(a > 0)$. Diện tích toàn phần của tứ diện là

A. $32a^2$;　B. $64a^2$;　C. $23a^2$;　D. $36a^2$.

11.5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.Biết $AB = AC = AA' = a > 0$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Thể tích của tứ diện $CBB'A'$ là :

A. $\dfrac{a^3}{2}$;　B. $\dfrac{a^3}{3}$;　C. $\dfrac{a^3}{6}$;　D. $\dfrac{2a^3}{3}$.

11.6. Thể tích hình tứ diện đều có cạnh bằng a là :

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$;　B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$;　C. $\dfrac{5a^3\sqrt{2}}{12}$;　D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

11.7. $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Đỉnh A' cách đều các đỉnh A, B, C, D. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị thể tích của hình lăng trụ nói trên ?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$;　B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$;　C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$;　D. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

11.8. Cho hình diện $ABCD$ và B' là trung điểm AB. Điểm $C' \in AC$ thoả mãn $2AC' = C'C$. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị tỉ số thể tích giữa khối tứ diện $AB'C'D$ và phần còn lại của khối tứ diện diện $ABCD$?

A. $\dfrac{1}{6}$;　B. $\dfrac{1}{5}$;　C. $\dfrac{1}{3}$;　D. $\dfrac{2}{5}$.

11.9. Đáy của hình hộp đứng là một hình thoi có đường chéo nhỏ bằng d,góc nhọn bằng α. Nếu diện tích của một mặt bên bằng S thì thể tích của hình hộp ấy bằng :

A. $dS\cos\alpha$;　B. $dS\sin\dfrac{\alpha}{2}$;　C. $\dfrac{1}{2}dS\sin\alpha$;　D.$dS\sin\alpha$.

11.10. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi I, J là trung điểm các cạnh AA', BB'. Khi đó thể tích của khối đa diện $ABCIJC'$ bằng

A. $\frac{3}{4}V$; B. $\frac{4}{5}V$; C. $\frac{2}{3}V$; D. $\frac{3}{5}V$.

11.11. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1, tâm O, trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị thể tích khối tứ diện $OABC$

A. $\frac{1}{8}$; B. $\frac{1}{12}$; C. $\frac{1}{9}$; D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

11.12. Cho hình chóp $SABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của hình chóp ấy bằng :

A. $\frac{abc}{3}$; B. $\frac{abc}{6}$; C. $\frac{abc}{9}$; D. $\frac{2abc}{3}$.

11.13. Thể tích của hình chóp tam giác đều có chiều cao bằng h, cạnh bên bằng a là :

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - h^2)h$; B. $\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - h^2)h$; C. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - h^2)a$; D. $\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2 - h^2)h$.

11.14. Thể tích của hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên nghiêng trên đáy một góc 60^0 là :

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$; B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$; C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

11.15. Đáy của hình chóp $SABCD$ là một hình vuông cạnh a. Tính thể tích của hình chóp đó. Biết rằng cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 60^0.

A. $a^3\sqrt{2}$; B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$; C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

11.16. Cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Nếu mặt chéo của nó là một tam giác đều thì thể tích của hình chóp đó bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; B. $\frac{a^3}{2}$; C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

11.17. Cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng :

A. $\frac{2a}{3}$; B. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; D. $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

11.18. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M là trung điểm AA'. Mặt phẳng (MB_1C) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần đó bằng :

A. $\frac{1}{3}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{5}{6}$; D. 1.

11.19. Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Gọi M, N là trung điểm lần lượt của hai cạnh AB, BC. Khi đó thể tích của khối tứ diện $OCMN$ là :

A. a^3; B. $\frac{2a^3}{3}$; C. $\frac{3a^3}{4}$; D. $\frac{a^3}{4}$.

11.20. Thể tích khối 8 mặt đều là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chương II. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1 MẶT CẦU, KHỐI CẦU

I. Kiến thức cần nhớ

1. Mặt cầu $S(O; R)$ là tập hợp $\{M \mid OM = R\}$.

Khối cầu $S(O; R)$ là tập hợp $\{M \mid OM \le R\}$.

Mặt cầu là hình tròn xoay tạo bởi một đường tròn khi quay quanh một đường kính của nó.

Khối cầu là hình tròn xoay tạo bởi một hình tròn khi quay quanh một đường kính của nó.

2. Giao của mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P)

Gọi d là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P). H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P).

+ Nếu $d > R$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu.

+ Nếu $d = R$ thì giao là điểm H. Khi đó ta nói :

- Mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H.
- Mặt phẳng (P) là tiếp diện của mặt cầu $S(O; R)$ tại H

+ Nếu $d < R$ thì giao là đường tròn tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Đặc biệt, khi $d = 0$ thì giao được gọi là đường tròn lớn ($r = R$).

3. Giao của mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng (Δ).

Gọi d là khoảng cách từ O đến đường thẳng (Δ). H là hình chiếu vuông góc của O trên (Δ).

+ Nếu $d < R$ thì (Δ) cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

+ Nếu $d = R$ thì (Δ) tiếp xúc với mặt cầu tại H. Ta cũng nói (Δ) là một tiếp tuyến của mặt cầu. Các tiếp tuyến của mặt cầu tại H nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại điểm ấy.

+ Nếu $d > R$ thì (Δ) không cắt mặt cầu.

4. Vẽ các tiếp tuyến kẻ từ A đến đến mặt cầu. Khi đó :

+ Các đoạn thẳng nối A với tiếp điểm bằng nhau.

+ Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn.

5. *Diện tích* mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

II. Các bài toán thường gặp

Bài toán 1. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

- *Nhắc lại* : Đường thẳng đi qua tâm của đường tròn và vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn được gọi là trục của đường tròn ấy.

Như vậy trục của đường tròn là tập hợp các điểm cách đều mọi điểm của đường tròn ấy.

- Cần và đủ để hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đa giác đáy có đường tròn ngoại tiếp.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy (*gọi tắt là trục của đáy*) và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.

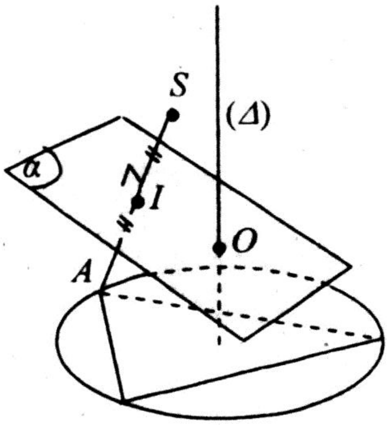
Bởi thế, trong trường hợp thuận lợi tìm được trục của đáy thì việc tìm tâm ngoại tiếp khối chóp đưa về tìm giao của mặt phẳng trung trực của một cạnh bên với trục của đáy (h.22a)

Gọi (O), SA, (α), (Δ) theo thứ tự là tâm của mặt cầu ngọi tiếp hình chóp có đỉnh S, một cạnh bên, mặt phẳng trung trực của SA, trục của đáy

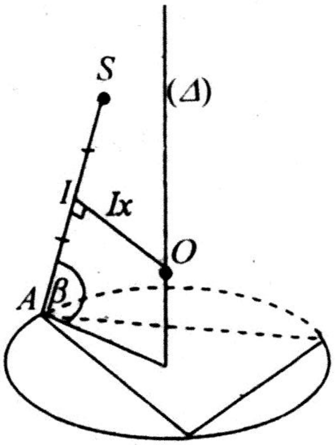
$$O = (\alpha) \cap (\Delta)$$

Chú ý : Việc tìm giao của đường thẳng và mặt phẳng phải đưa về tìm giao của hai đường thẳng .

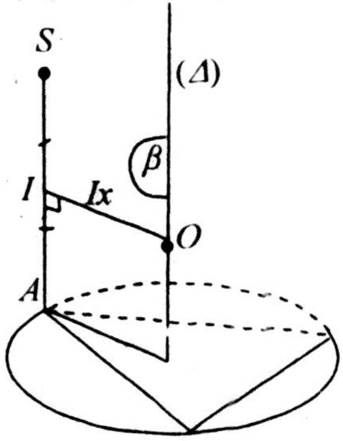
Giả sử cạnh bên SA và trục (Δ) cùng thuộc mặt phẳng (β) thì thay mặt phẳng (α) bởi đường trung trực Ix của SA nằm trong mặt phẳng (β) ấy. Nghĩa là $O = Ix \cap (\Delta)$ (h.22b, h 22c).



Hình 22a



Hình 22b

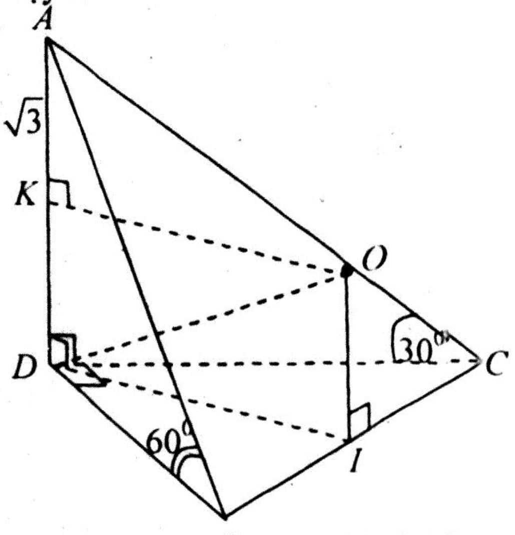


Hình 22c

Thí dụ 1$^{(P)}$. Cho tứ diện $ABCD$ có 3 cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau. Cho biết $DA = \sqrt{3}$; $\widehat{DBA} = 60^0$; $\widehat{DCB} = 30^0$.
Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

(h.23) Gọi I , K theo thứ tự là trung điểm của BC, DA. Vẽ hình bình hành $KDIO$. Ta có O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Thật vậy :



Hình 23

Theo giả thiết ta có ΔBDC vuông tại $D \Rightarrow ID = IB = IC$. (1)

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}DA \perp DB\\ DA \perp DC\end{array}\right. \Rightarrow DA \perp (BCD)\\ OI \,//\, DA\end{array}\right. \quad (2)$$

$\Rightarrow DA \perp DI$ (3)

$\Rightarrow OI \perp (BCD)$ (4)

Từ (1), (4) $\Rightarrow OB = OC = OD$ (5)

Từ (2), (3) $\Rightarrow$ OK là đường trung trực của $\Delta OAD \Rightarrow OD = OA$. (6)

Từ (5), (6) ta có điều cần chứng minh.

Ta có $DC = DA\cot 30^0 = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$, $DB = DA\cot 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$.

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 = 1 + 9 = 10,\ OD^2 = KD^2 + DI^2 = KD^2 + \frac{BC^2}{4} = 3 + \frac{10^2}{4} = 28$$

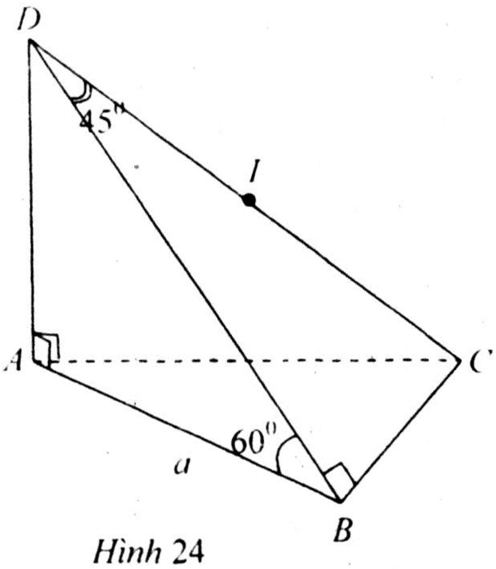
Bán kính mặt cầu phải tìm là $R = OD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Thí dụ 2$^{(P)}$. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $DA \perp (ABC)$, nhị diện cạnh DB là nhị vuông. Cho biết $AB = a$; $\widehat{BDC} = 45^0$; $\widehat{DBA} = 60^0$.

1) Chứng minh $BC \perp DB$.

2) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Hình 24

1) Ta có $\begin{cases} DA \perp (ABC) \Rightarrow (DAB) \perp (ABC) \\ (ABC) \cap (DBC) = BC \\ (DBC) \cap (DAB) = DB \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (DAB) \Rightarrow BC \perp DB$ (đpcm)(h.24)

2) Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = 90^0$ suy ra DC là đường kính và trung điểm I của nó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Trong tam giác DAB vuông tại A ta có

$$DB = \frac{AB}{\cos 60^0} = 2a.$$

Trong tam giác DBB vuông tại B ta có

$$DC = DB\cos 45^0 = a\sqrt{2}.$$

Bán kính mặt cầu phải tính là $R = \frac{DC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Thí dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = BD = a$, $CD = b$ hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau.

1) Chứng minh ΔBCD là tam giác vuông.

2) Xác định tâm và bán kính của tứ diện.

Lời giải

1) Gọi I là trung điểm BC (h.25). Do $AB = AC$ nên ΔABC là tam giác cân suy ra $AI \perp BC$. Theo giả thiết $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AI \perp (BCD) \Rightarrow IB, IC, ID$ là hình chiếu vuông góc của AB, AC, AD trên mặt phẳng (BCD)

$$\overset{AB=AC=AD}{\Longrightarrow} \quad IB = IC = ID \qquad (1)$$

$\Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác vuông tại D. (đpcm)

2) • Trong mặt phẳng (ABC) OJ là đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AI tại O. Ta có $OA = OB$. (2)

Từ (1) suy ra $OB = OC = OD$ (3)

Từ (2), (3) ta có $OA = OB = OC = OD$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

• Gọi J là trung điểm AB. Ta có $OJ \perp AB$. Trong hai tam giác đồng dạng AJO và AIB ta có $\frac{OA}{AB} = \frac{AJ}{AI} \Leftrightarrow OA = \frac{AJ.AB}{AI} = \frac{a^2}{2.AI}$ (4)

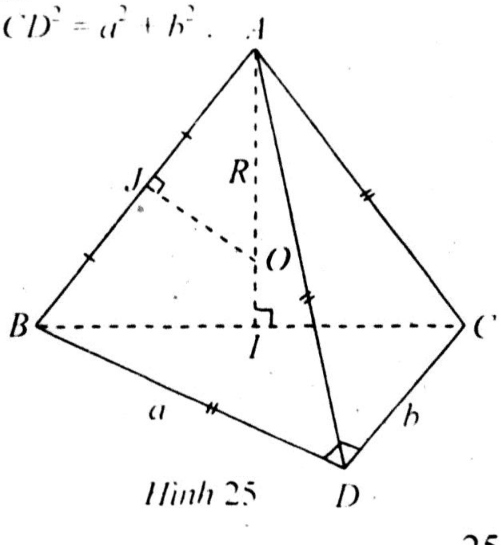
Trong tam giác BCD vuông tại D có $BC^2 = BD^2 + CD^2 = a^2 + b^2$.

Trong tam giác ABI vuông tại I có

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{BC^2}{4}}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - b^2} \qquad (5)$$

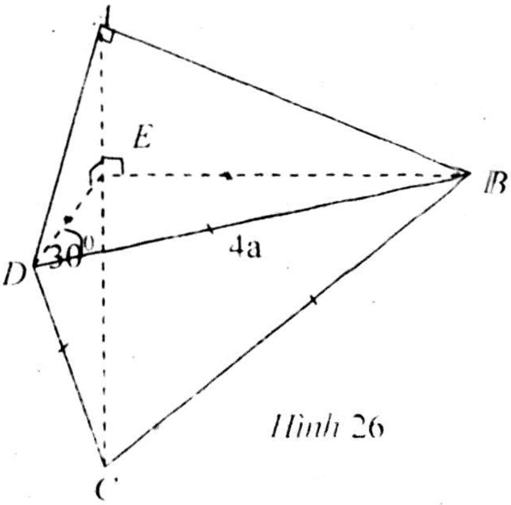
Thay (5) vào (4) có $R = OA = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$



Hình 25

Thí dụ 4*. Cho tứ diện $ABCD$ có mặt ABD là tam giác vuông tại A, mặt BCD là tam giác đều có cạnh bằng $4a$. Mặt phẳng vuông góc với AC, qua BD cắt AC tại E. E nằm giữa A và C, ΔBED cân tại E và $\widehat{BED} = 30^0$. Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ấy.

Lời giải



Hình 26

[(h.26) Từ ΔBCD là tam giác đều suy được các kết quả sau :

- $CB = CD \Rightarrow EB = ED \Rightarrow AB = AD$ (tức là tam giác ABD vuông cân tại A)

$$\Rightarrow AB = AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$$

- $\dfrac{BE}{\sin 30^0} = \dfrac{BD}{\sin 120^0} \Rightarrow BE = \dfrac{BD.\sin 30^0}{\sin 120^0} = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$

Trong ΔBEA vuông tại E có

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{8a^2 - \frac{16a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \quad (1)$$

Trong ΔBEC vuông tại E có $CE = \sqrt{CB^2 - BE^2} = \sqrt{16a^2 - \dfrac{16a^2}{3}} = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AC = AE + EC = 2a\sqrt{6} \Rightarrow AC^2 = 24a^2$. (3)

Mặt khác $AB^2 + BC^2 = 8a^2 + 16a^2 = 24a^2$. (4)

So sánh (3), (4) ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^0$

Từ các kết quả trên suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 90^0 \Rightarrow AC$ là đường kính đường và trung điểm của AC là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

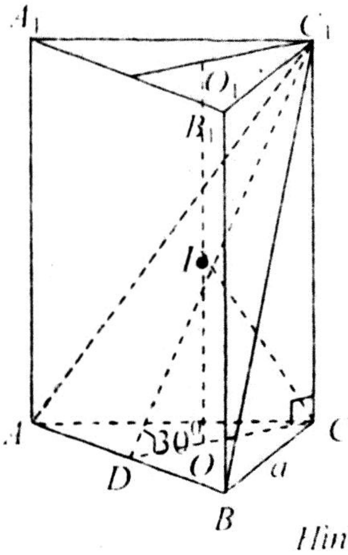
Bài toán 2. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Thí dụ 5$^{(P)}$. Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng $4a$, mặt chéo (ABC_1) nghiêng trên đáy một góc 60^0.

Lời giải

Gọi O, O_1, D, I theo thứ tự là trọng tâm ΔABC, trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$, trung điểm AB, OO_1. Theo giả thiết ta có $\widehat{C_1DC} = 30^0$.

Gọi I theo thứ tự là trung điểm OO_1 thì I là tâm và IC là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.



Hình 27

Ta có $CD = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$, $OC = \dfrac{2}{3}CD = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$

$$C_1C = CD\tan 30^0 = 2a\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = 2a$$

Ta có $IO = \dfrac{C_1C}{2} = a$.

Trong tam giác IOC vuông tại O ta có

$$IC = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16a^2}{9}} = \frac{5a}{3}$$

Vậy diện tích mặt cầu phải tính là

$$S = 4\pi R^2 = \frac{100a^2}{9}$$

Thể tích mặt cầu phải tính là : $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}.\frac{(5a)^3}{9} = \frac{500a^3}{27}$.

Thí dụ 6. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O đường kính $AB = 2R$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi O_1 là điểm đối xứng của O qua A. Lấy điểm M sao cho MN vuông góc với (P) và $MN = 2R$. Tính thể tích khối cầu (S) đi qua đường tròn đã cho và điểm M.

Lời giải

(h.28) Gọi (Δ) là trục của đường tròn đã cho. Ta có $(\Delta) // MN$. Trong mặt phẳng (M, Δ) kẻ đường trung trực của MA cắt với (Δ) tại I, thì I là tâm của mặt cầu (S). Gọi bán kính của (S) là x. Ta có $x = IM = IA$.

Trong hai tam giác vuông IMK, IAO ta có

$x^2 = IM^2 = IK^2 + MK^2 = 4R^2 + (2R - OI)^2$ (1)

$x^2 = IA^2 = IA^2 - IO^2 = R^2 + OI^2$ (2)

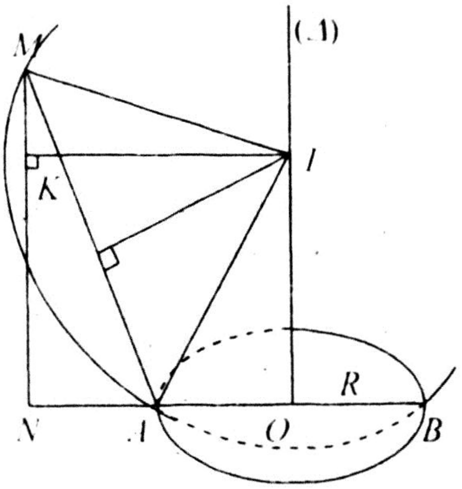
Từ (1), (2) suy ra

$4R^2 + (2R - OI)^2 = R^2 + OI^2$

$\Leftrightarrow 7R^2 = 4R.OI \Leftrightarrow OI = \frac{7R}{4}$

Thay vào (2) có $x^2 = R^2 + \frac{49R^2}{16} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{65}}{4}$

Vậy thể tích khối cầu (S) là $V = \frac{4x^3}{3} = \frac{\sqrt{65}^3}{48}\pi R^3$



Hình 28

Thí dụ 7. Cho hình chóp $SABC$. Biết rằng có một mặt cầu $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại trung điểm của mỗi cạnh đồng thời mặt cầu ấy đi qua trung điểm của các cạnh SA, SB, SC.

1) Chứng minh $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính diện tích mặt cầu biết cạnh đáy và chiều cao của hình chóp là a và h.

Lời giải

1) Gọi A', B', C', A_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, BC, BA. (h.29) Ta có :

$+ (A'B'C') // (ABC)$ (1)

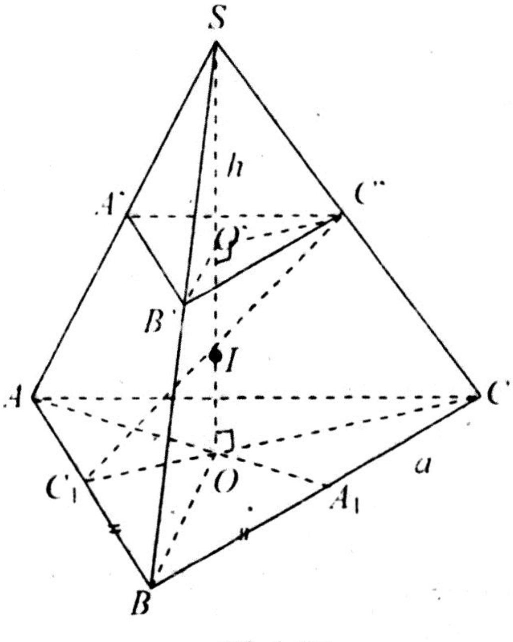
$+ \Delta A'B'C'$, ΔABC đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$ (2)

Gọi I, x theo thứ tự là tâm và bán kính của mặt cầu $(\mathscr{C})$. Lại gọi O, O' lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên (ABC), $(A'B'C')$. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của $C'C$.

Do có (1) nên có $I = O'O \cap (\alpha)$ (3)

Theo giả thiết A_1, B_1 là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ B tới $(\mathscr{C})$ nên có

$2BA_1 = 2BB_1 \Leftrightarrow BA = BC$



Hình 29

Tương tự $BA = AC$ nên ΔABC là tam giác đều. (4)

Từ (2), (4) suy ra $\Delta A'B'C'$ cũng là tam giác đều. (5)

Do có (4), (5) suy ra : $2O'B' = 2O'C' = OB = OC$ nên $O'OBB'$ và $O'OCC'$ là hai hình thang vuông bằng nhau $\Rightarrow 2B'B = 2C'C \Rightarrow SB = SC$

Tương tự $SA = SB$ nên $S.ABC$ là hình chóp đều. (đpcm)

2) Gọi $J = O'O \cap C'C_1$ ta có $\dfrac{JC'}{JC_1} = \dfrac{2O'C'}{2OC_1} = \dfrac{OC_1}{OC_1} = 1 \Rightarrow J$ là trung điểm $C'C \Rightarrow J$ thuộc mặt phẳng trung trực (α) của $C'C \Rightarrow J \equiv I$.

Dễ thấy $IO = \dfrac{SO}{4}$, $OC_1 = \dfrac{CC_1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Trong tam giác IOC_1 vuông tại O có $x^2 = IC_1^2 = IO^2 + OC_1^2 = \dfrac{h^2}{16} + \dfrac{a^2}{12}$

Vậy diện tích mặt cầu phải tính bằng $4\pi x^2 = 4\pi\left(\dfrac{h^2}{16} + \dfrac{a^2}{12}\right) = \pi\left(\dfrac{h^2}{4} + \dfrac{a^2}{3}\right)$.

Bài toán 3. Điểm thuộc mặt cầu.
Đường tròn cố định của mặt cầu biến thiên.

1) Để chứng minh điểm A thuộc mặt cầu (O, R) bạn có thể sử dụng 2 cách sau :

- Chứng tỏ $OA = R$.
- Chứng tỏ $\widehat{IAJ} = 90^0$ trong đó IJ là một đường kính.

2) Để chứng minh 3 điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu, bạn có thể sử dụng 2 cách sau :

- Chứng tỏ $OA = OB = OC$.
- Chứng tỏ $\widehat{IAJ} = \widehat{IBJ} = \widehat{ICJ} = 90^0$ trong đó IJ là một đường kính.

3) Cho A là một điểm thuộc mặt cầu (O, R). Để chứng minh điểm A thuộc một đường tròn cố định của mặt cầu (O, R) bạn phải khẳng định được đồng thời hai điều kiện sau :

- Có một đường thẳng (Δ) cố định đi qua tâm của mặt cầu đã cho.
- Mặt phẳng qua A vuông góc với (Δ) là mặt phẳng cố định.

Thí dụ 8. Cho đường thẳng (Δ) và một điểm A nằm ngoài (Δ). Gọi (P) là mặt phẳng qua A và (Δ). Một góc $\widehat{xAy}$ quay quanh A cắt (Δ) tại B và C. Trên đường thẳng At qua A và vuông góc với (P) lấy một điểm S. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC.

1) Chứng minh 5 điểm A, B, C, H, K cùng thuộc một mặt cầu.

2) Tính bán kính mặt cầu trên, nếu $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^0$.

3) Giả sử ΔABC vuông tại A. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCHK$ luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi trên At và góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A.

Lời giải

1) (h.30) Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$

Từ $\begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CD \\ AC \perp CD \ \text{(theo (1))} \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Kết hợp với giả thiết $SC \perp AK$. Ta có $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp KC$

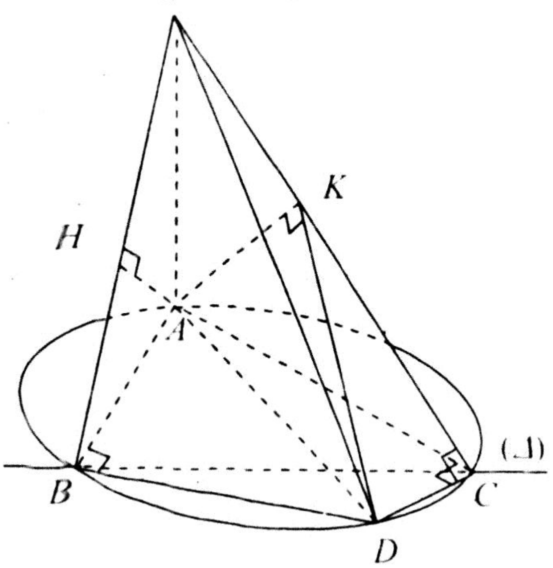
Hay $\widehat{AKC} = 90^0$. Tương tự $\widehat{AHC} = 90^0$

Vậy nên C, H, K cùng nằm trên đường tròn đường kính AD (đpcm)

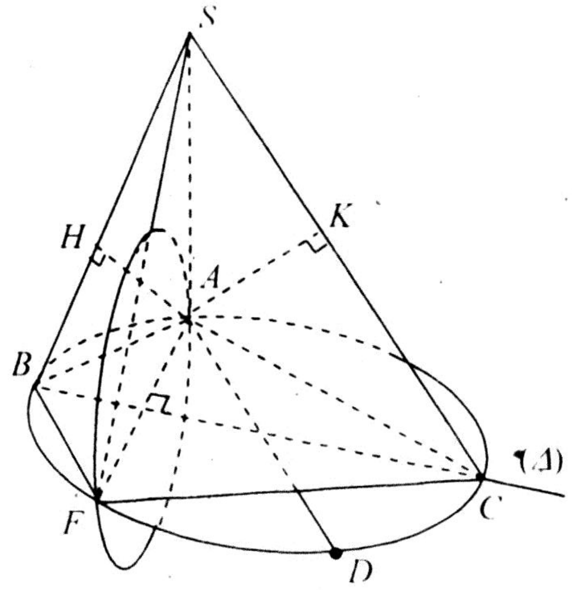
2) Trong tam giác ABC ta có $AD = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sin 60^0} = \dfrac{2BC}{\sqrt{3}}$ (1)

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4 + 9 - 2.2.3.\cos 60^0 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Thay vào (1) có $AD = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. Vậy bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$



Hình 30



Hình 31

3) (h.31) Lấy lấy điểm đối xứng của A qua đường thẳng (Δ). Cố nhiên F cố định.

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow F$ thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow F$ thuộc mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCHK$. Vậy khi ΔABC vuông tại A mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCHK$ luôn đi qua một đường tròn đường kính AF cố định nằm trong mặt phẳng (SAF).

Lời nhắn: Các bạn liên hệ với bài tập 1.17

Lời bình • Thay cho câu 3, bài toán có thể yêu cầu tìm tập hợp tâm I của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện khi S thay đổi trên At và góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A. Với kết quả câu 3 ta thấy rằng tập hợp I là trục của đường tròn (SAF).

• Nếu là một đường tròn cố định thì cả mặt phẳng chứa đường tròn và trục của nó đều phải cố định. Bởi thế đường tròn cố định của một mặt cầu biến thiên ắt phải thuộc mặt phẳng cố định vuông góc với một đường thẳng cố định đi qua tâm của mặt cầu ấy. Trong bài toán trên

+ Khi $\widehat{BAC} = 90^0 \Leftrightarrow BC$ là đường thẳng cố định đi qua tâm của mặt cầu.

+ Lại có A là điểm cố định, đường tròn cố định phải thuộc mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC (mặt phẳng (SAF)). Lời giải bài toán đã cho ta thấy tất cả những suy nghĩ đó. Các bạn theo dõi tiếp Thí dụ sau.

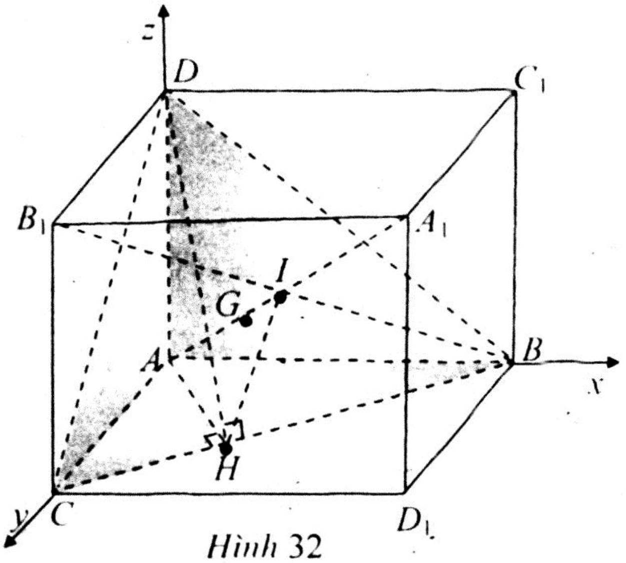
Thí dụ 9. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R và A là một điểm trên (S). Ba tia Ax, Ay, Az đôi một vuông góc với nhau cắt (S) tại B, C, D.

1) Chứng minh mặt phẳng (BCD) luôn đi qua một điểm cố định.

2) Chứng minh rằng hình chiếu H của D trên đường thẳng BC thuộc một mặt cầu cố định.

Lời giải

1) Dựng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $ABD_1C.DC_1A_1B_1$(h.32). Rõ ràng các đỉnh của hình hộp này thuộc mặt cầu (S).



Hình 32

Gọi $I = A_1A \cap B_1B$, thì I là tâm của mặt cầu (S). Cố nhiên A, A_1, I là các điểm cố định. Gọi G là trọng tâm G của ΔBCD ta có

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} \qquad (1)$$

$\Rightarrow G$ là điểm cố định .

Tóm lại mặt phẳng (BCD) luôn đi qua một điểm cố định G được xác định bởi (1).

2) Ta có $B_1C \perp (ABD_1C)$

$\Rightarrow (B_1CB) \perp (ABD_1C)$.

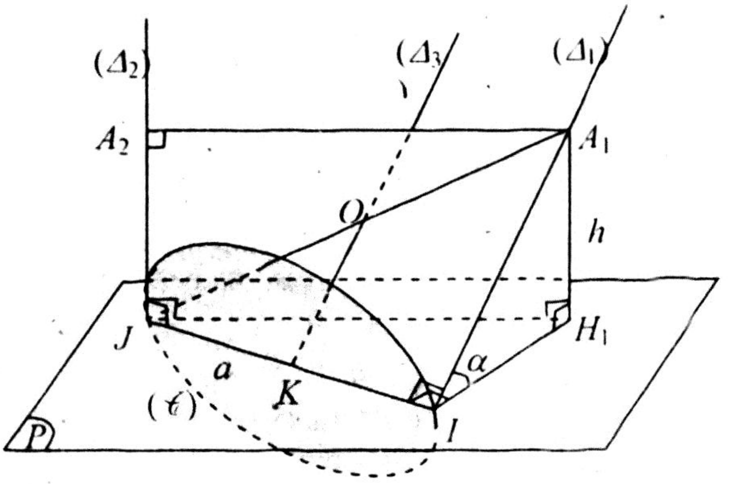
Bởi vậy : H của D trên đường thẳng $BC \Rightarrow AH \perp (B_1CB) \Rightarrow AH \perp IH$. Điều này chứng tỏ H thuộc mặt cầu đường kính AI. Đó là một mặt cầu cố định (do A, I là các điểm cố định). (đpcm)

Thí dụ 10. Cho hai đường thẳng chéo nhau (Δ_1), (Δ_2) nhận I, J là đường vuông góc chung ($I \in \Delta_1$, $J \in (\Delta_2)$), $IJ = a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với (Δ_2), đặt (α) là góc giữa (Δ_1) và (P). Xét mặt phẳng (Q) song song với (P) và cắt (Δ_1), (Δ_2) theo thứ tự tại A_1, A_2. Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của A_1 trên (P).

1) Chứng minh 5 điểm I, J, A_1, A_2, H_1 cùng thuộc một mặt cầu, chỉ rõ tâm của mặt cầu, tính diện tích của mặt cầu theo a, α, và khoảng cách h giữa mặt phẳng (P) và (Q).

2) Chứng minh khi mặt phẳng (Q) thay đổi thì tâm mặt cầu nói trên luônthuộc một đường thẳng cố định và mặt cầu ấy luôn đi qua một đường tròn cố định.

Lời giải



Hình 33

1) Theo giả thiết $(P) // (Q)$ suy ra $A_1A_2 // H_1J$. (h.33)

Kết hợp với $(\Delta_2) \perp (P)$ suy ra $A_1A_2JH_1$ là hình chữ nhật. (1)

Bởi thế nên có

$$\widehat{JA_2A_1} = \widehat{JH_1A_1} = 90^0 \qquad (2)$$

Cũng từ (1) $\Rightarrow IJ \perp A_1H_1$

$$\xrightarrow{IJ \perp (\Delta_1)} IJ \perp (A_1H_1I)$$

$\Rightarrow IJ \perp A_1I$

$\Rightarrow$ hay $\widehat{JA_1} = 90^0$ (3)

Từ (2), (3) suy ra A_2, J, I cùng nhìn JA_1 dưới cùng một góc vuông nên 5 điểm I, J, A_1, A_2, H_1 cùng thuộc một mặt cầu đường kính JA_1. Dương nhiên tâm mặt cầu ấy là trung điểm O của JA_1, bán kính là $R = \frac{JA}{2}$.

Ta có $4R^2 = (JA_1)^2 = IJ^2 + (IA_1)^2 = JI^2 + (IH_1)^2 + (H_1A_1)^2$

$$= a^2 + h^2\cot^2\alpha + h^2 = a^2 + h^2(1+\cot\alpha)^2$$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \pi[a^2 + h^2(1+\cot\alpha)^2]$ (*)

2) Xét mặt phẳng (R) chứa IJ và vuông góc với (Δ_2). Rõ ràng (R) là mặt phẳng cố định và vuông góc với đường thẳng cố định (Δ_2) đi qua tâm của mặt cầu đang xét. Bởi thế nên đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính IJ là đường tròn cố định của mặt cầu đang xét. Vậy khi mặt phẳng (Q) thay đổi, mặt cầu $(IJA_1A_2H_1)$ luôn đi qua đường tròn đường kính IJ nằm trong mặt phẳng vuông góc với (Δ_2).

Lời bình: (*) Để tính diện tích mặt cầu, nếu biết được R^2 thì không cần biết đến R.

Bài toán 4. Tiếp tuyến của mặt cầu

Bạn có thể một đường thẳng, hoặc một đoạn thẳng tiếp xúc với mặt cầu theo mấy cách sau :

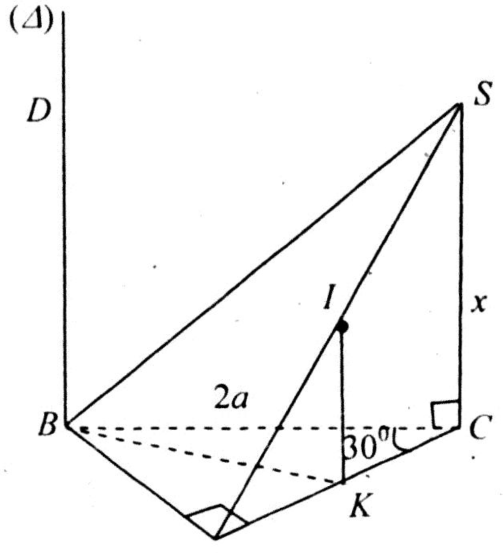
- Để chứng minh đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của mặt cầu (O, R) ta chứng minh khoảng cách từ O đến (Δ) bằng R.
- Khi A là một điểm thuộc mặt cầu (O, R) thì đường thẳng (Δ) qua A là tiếp tuyến của mặt cầu ấy khi và chỉ khi $OA \perp (\Delta)$.
- Cho A và B là hai điểm thuộc mặt cầu (O, R) và đường thẳng MA một tiếp tuyến của mặt cầu. Khi đó đường thẳng MB tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi $MA = MB$.

Thí dụ 11$^{(P)}$. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC vuông tại A, $\widehat{ACB} = 30^0$, $BC = 2a$, cạnh SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC = x$. Gọi (Δ) là đường thẳng qua B và song song với SC.

1) Với giá trị nào của x thì (Δ) là một tiếp tuyến của với mặt cầu đường kính SA.

2) Tính theo a thể tích khối chóp $SABC$ khi x nhận giá trị ở câu 1.

Lời giải



Hình 34

1) Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của SA, AC $\Rightarrow IK / SC // (\Delta) \Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến (Δ) bằng khoảng cách từ K (Δ) và bằng BK.

Trong tam giác ABC ta có

$+\ AB = BC\cos 30^0 = a\sqrt{3}$

$+\ AC = BC\sin 30^0 = a$

$\Rightarrow AK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$,

$+\ BK^2 = AB^2 + AK^2$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

- Mặt cầu đường kính SA tiếp xúc với (Δ) khi và chỉ khi khoảng cách từ K đến (Δ) bằng $\dfrac{SA}{2}$ tức là $\dfrac{SA}{2} = BK$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow SA = a\sqrt{5} \Leftrightarrow SA^2 = 5a^2 \Leftrightarrow AC^2 + SC^2 = 5a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 = 5a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = 2a.$$

2) Dễ dàng suy ra $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$ nên SB là đường kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$. Theo kết quả câu 1: $SC = BC = 2a \Rightarrow SB = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là $R = a\sqrt{2}$ và thể tích của nó là

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}(a\sqrt{2})^3 = \frac{8a^3\pi\sqrt{2}}{3}$$

Thí dụ 12. Chứng minh nếu các cạnh của một tứ diện tiếp xúc với một mặt cầu thì các cặp cạnh của tứ diện ấy đôi một bằng nhau.

Lời giải

Giả sử mặt cầu tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, DB của tứ diện theo thứ tự tại P, Q, R, M, N, L. (h.35)

Khi đó AP, AQ, AR là các tiếp tuyến xuất phát từ A nên

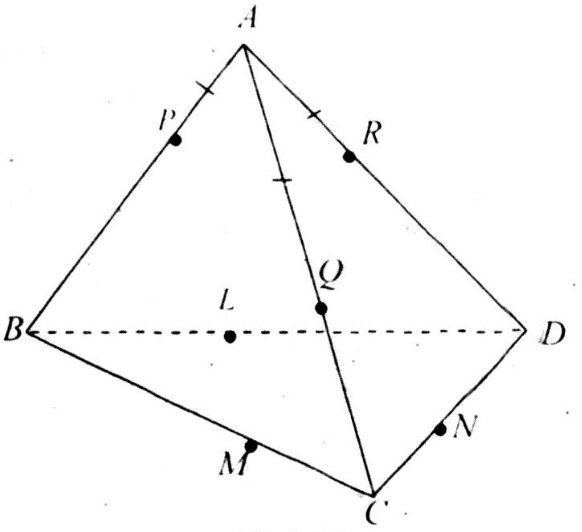
$AP = AQ = AR$

Tương tự ta cũng có

$BP = BM = BL$

$CQ = CM = CN$

$DR = DN = DL$



Hình 35

Vậy $AB + CD = AP + PB + CN + ND$

$= AQ + BL + CQ + DL$

$= (AQ + CQ) + (BL + DL) = AC + BD$

Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có

$AB + CD = AC + BD = AC + BD = AD + BC$ (đpcm)

Thí dụ 13. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính AB và một điểm C trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đường tròn tại A. Gọi M là một điểm bất kì trên đường tròn, H là hình chiếu vuông góc của A lên CM.

1) Chứng minh khi M thay đổi, điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

2) Giả sử các tiếp tuyến tại A và M của đường tròn $(\mathscr{C})$ cắt nhau tại K. Chứng minh KH là tiếp tuyến chung của hai mặt cầu đường kính AB và AC.

Lời giải

1) Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên CB, thì I là điểm cố định. (h.36)

Ta có $\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp AC \text{ (do } AC \perp (AMB)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (CAM)$ (1)

Lại có $AH \perp C \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} AH \perp HI & (2) \\ AH \perp CB & (3) \end{cases}$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính AI nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với CB. (đpcm)

2) Từ (1) $\Rightarrow AH \perp HB \Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính AB.

Từ (2) $\Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính AC.

Do $AC \perp AK$ nên KA là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AC. (4)

Do KM là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ nên KM là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AB. (5)

Gọi J là trung điểm AM. Ta có

+ $JA = JM = JH$

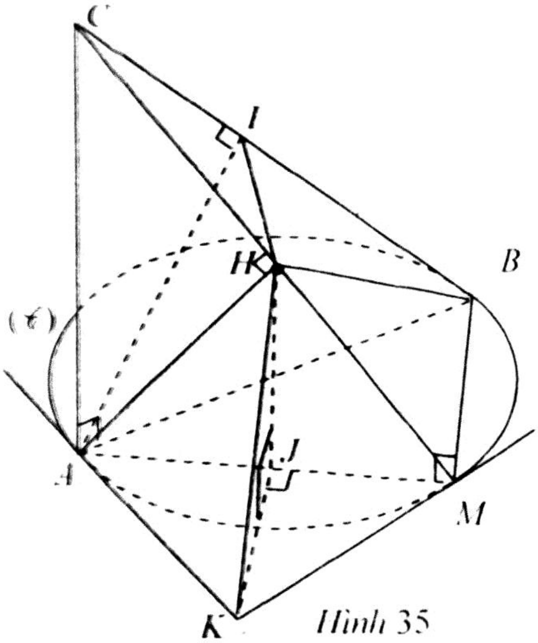
(do ΔAHM vuông tại H) **(6)**

$$+\begin{cases} KJ \perp AM \\ KJ \perp AC \text{ (do } AC \perp (AMB)) \end{cases}$$

$\Rightarrow KJ \perp (AHM)$ **(7)**

Từ (6), (7) $\Rightarrow KA = KM = KH$ **(8)**

Từ (4), (5), (8) $\Rightarrow KH$ là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AC đồng thời cũng là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AB (đpcm)



Hình 35

§2 MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ, MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN

I. Kiến thức cần nhớ

A. Mặt trụ, hình trụ, khối trụ

1. Mặt trụ $T(\Delta; R)$ là tập hợp các điểm M cách đường thẳng (Δ) một khoảng R.. Mặt trụ là hình tròn xoay tạo bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng (Δ) song song với l

2. Hình trụ là phần của mặt trụ $T(\Delta; R)$ nằm giữa hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P') vuông góc với (Δ), cùng với hai hình tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ là giao tuyến của mặt trụ với (P) và (P').

Hình trụ là hình tròn xoay tạo bởi ba cạnh của hình chữ nhật khi quanh quanh cạnh còn lại của nó.

- *Diện tích xung quanh của hình trụ* $T(h; R)$ bằng tích của chu vi đáy với đường cao :

$$S_{xq} = 2\pi Rh$$

- *Diện tích toàn phần* của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$$

3. Khối trụ là hình trụ cùng với phần bên trong của nó.

Khối trụ là hình tròn xoay tạo bởi miền hình chữ nhật khi quanh quanh một cạnh của nó.

Thể tích của khối trụ : $V = \pi R^2 h.$

B. Mặt nón, hình nón, khối nón

1. Cho điểm O nằm trên đường thẳng (Δ). Mặt nón đỉnh O, trục Δ, góc ở đỉnh 2α ($\alpha < 180^0$) là hình tạo bởi đường thẳng (Δ) đi qua O và hợp với (Δ) một góc bằng α.

Mặt nón là hình tròn xoay tạo bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng (Δ) cắt l nhưng không vuông góc với (Δ).

2. Hình nón là hình tròn xoay tạo bởi một tam giác cân khi quanh quanh trục đối xứng của tam giác đó.

- *Diện tích xung quanh* của hình nón $N(l, R)$ bằng nửa tích của chu vi đáy với đường sinh : $S_{xq} = \pi Rl$

- *Diện tích toàn phần* của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

3. Khối nón là hình nón cùng với phần bên trong của nó

Khối nón là hình tròn xoay tạo bởi một *miền* tam giác cân khi quanh quanh trục đối xứng của tam giác đó.

Thể tích của khối nón : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h.$

II. Các bài toán thường gặp

Bài toán 1. Tính các diện tích, thể tích liên quan với mặt trụ, khối trụ

Thí dụ 15. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 5$. Một mặt phẳng song song và cách trục OO' của hình trụ một khoảng bằng 3 cắt hai đáy theo thứ tự tại AB, $A'B'$.

1) Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$, nếu chiều cao $h = 15$.

2) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ trong trường hợp thiết diện có diện tích bằng 96

Lời giải

1) Gọi K là trung điểm AB. (h.36)

Ta có $OK \perp AB$, $OK \perp AA'$ suy ra $OK \perp (ABB'A')$.

Do vậy độ dài OK chính là khoảng cách giữa trục và mặt phẳng thiết diện. Theo giả thiết $OK = 3$. Trong ΔOKA vuông tại K ta có :

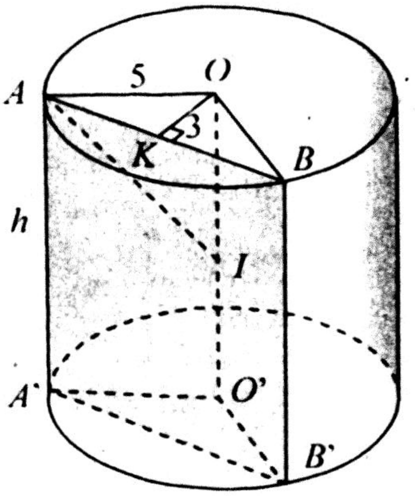
$KA^2 = OA^2 - OK^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow KA = 4 \Rightarrow AB = 2KA = 8.$

Diện tích thiết diện là $S_{td} = AB.AA' = 8.15 = 120$

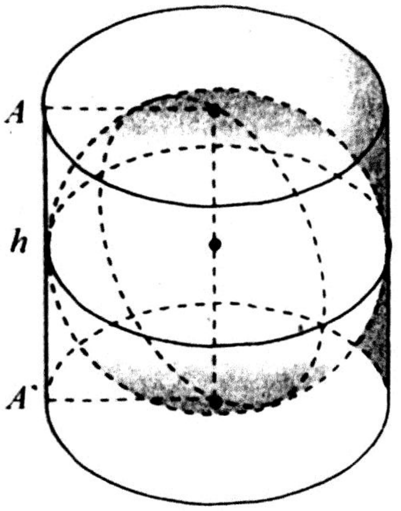
2) $S_{td} = 96 \Leftrightarrow AB.AA' = 96 \Leftrightarrow 8.AA' = 96 \Leftrightarrow AA' = 12$

Gọi I là trung điểm OO' thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối trụ đã cho. Ta có $IO = \dfrac{AA'}{2} = 6$. $R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi\sqrt{61}.12 = 24\pi\sqrt{61}$ Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi.61.12 = 732\pi$.



Hình 36



Hình 37

Thí dụ 16. Tính diện tích toàn phần và thể tích của một hình trụ ngoại tiếp hình cầu có thể tích 36π.

Lời giải

Gọi bán kính hình cầu nội tiếp khối lăng trụ là R. (h.37(ở trên))

Ta có $V_C = \dfrac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{108}{4} = 27 \Leftrightarrow R = 3$

Ta có bán kính đáy của hình trụ cũng bằng R và chiều cao của hình trụ là: $h = 2R$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{TP} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \overset{h=2R}{=} 6\pi R^2 = 54\pi$

Thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h \overset{h=2R}{=} 2\pi R^3 = 54\pi$.

Lời bình: Tính diện tích toàn phần và thể tích của một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông là bài toán tương tự với bài toán trên.

Thí dụ 17. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp trong một hình trụ cho trước, góc giữa đường thẳng B_1D và mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 30^0. Khoảng cách giữa trục hình trụ đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích hình hộp và thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ ấy, biết rằng đường kính đáy hình trụ bằng $5a$.

Lời giải

(h.38). Là hình hộp nội tiếp hình trụ nên $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp chữ nhật. Từ đó suy ra :

+) $\dfrac{AD}{2}$ là bằng khoảng cách giữa trục hình trụ đến mặt phẳng (ABB_1A_1).

Theo giả thiết $\dfrac{AD}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow AD = 3a$.

+) Đường kính đáy hình trụ bằng $5a$

$\Rightarrow BD = 5a$

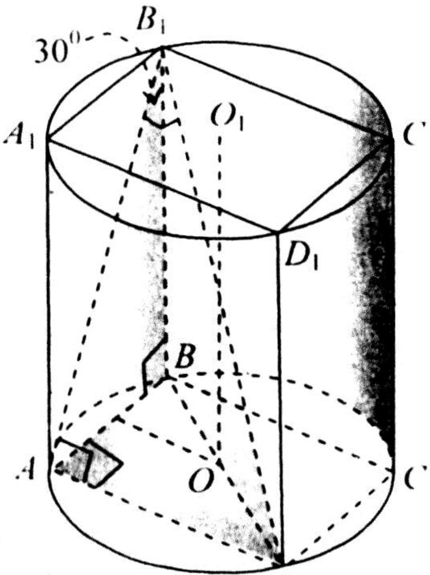
+) Dễ thấy $\widehat{AB_1D}$ là góc giữa đường thẳng B_1D và mặt phẳng (ABB_1A_1). Theo giả thiết $\widehat{AB_1D} = 30^0$. Trong ΔAB_1D vuông tại A có

$B_1D = \dfrac{AD}{\sin 30^0} = 2.3a = 6a$.

Trong ΔB_1BD vuông tại B có

$B_1B^2 = B_1D^2 - BD^2 = 36a^2 - 25a^2 = 11a^2$

$\Rightarrow B_1B = a\sqrt{11}$.



Hình 38

Vậy nên thể tích hình hộp đã cho là

$V = AB.AD.B_1B = 4a.3a.a\sqrt{11} = 12a^3\sqrt{11}$

Rõ ràng B_1D là đường kính của khối cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho.

Vậy nên bán kính khối cầu ấy là $R = \dfrac{1}{2}B_1D = 3a$.

Từ đó có thể tích khối cầu phải tính là $V_C = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi.27a^3}{3} = 36\pi a^3$.

Thí dụ 18. Cho hình trụ (T) có bán kính đáy bằng 4, chiều cao bằng 3. Tìm một hình trụ (T_1) khác có bán kính đáy là x, chiều cao bằng y và có thể tích bằng thể tích hình trụ (T) đã cho.

Lời giải

Theo bài ra ta có $\begin{cases} S_{tp} = 2\pi(x^2 + xy) = 2\pi(4^2 + 4.3) \\ V = \pi x^2 y = \pi.4^2.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy = 28 & (1) \\ x^2 y = 48 & (2) \end{cases}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow y = \dfrac{48}{x^2}$ (3)

Thế vào (1) có $x^2 + x\dfrac{48}{x^2} = 28 \Rightarrow x^3 - 28x + 48 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 24) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$. Thay vào (3)

Với $x = 2$ có $y = 12$; Với $x = 4$ có $y = 3$.

Cặp nghiệm $(x = 4, y = 3)$ cho ta hình trụ (T) ban đầu nên không thích hợp. Vậy hình trụ có bán kính đáy $x = 2$, chiều cao $y = 12$ là hình trụ duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 19. Trong các hình trụ có diện tích toàn phần của hình không đổi $S_{tp} = 2\pi a^2$, tìm hình trụ có thể tích nhỏ nhất .

Lời giải

Gọi x, y theo thứ tự là bán kính đáy, chiều cao của hình trụ . Thế thì :

+ Thể tích của khối trụ là $V = \pi x^2 y$.

+ Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = 2\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + xy = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xy}{2} = a^2$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số x^2, $\dfrac{xy}{2}$, $\dfrac{xy}{2}$ ta có $a^2 = x^2 + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xy}{2} \geq 3\sqrt[3]{x^2.\dfrac{xy}{2}.\dfrac{xy}{2}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{x^4y^2}{4}}$

$\Rightarrow a^6 \geq \dfrac{27}{4}(x^2y)^2 \Rightarrow x^2y \leq \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \pi x^2 y \leq \pi\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \leq \dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$

Dấu đẳng thức có khi $x^2 = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{a^2}{3} \Leftrightarrow \left(x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; y = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)$

Vậy max$V = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. Đó là thể tích của hình trụ mà cả đường kính đáy bằng chiều cao cùng bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Thí dụ 20. Trong tất cả các hình trụ có cùng thể tích V không đổi, tìm hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất .

Lời giải

Gọi x, y theo thứ tự là bán kính đáy, chiều cao của hình trụ. Thế thì :

+ Thể tích của khối trụ là $V = \pi x^2 y$

+ Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi(x^2 + xy) = 2\pi\left(x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số x^2, $\dfrac{xy}{2}$, $\dfrac{xy}{2}$ ta có

$$x^2+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}\ge 3\sqrt[3]{x^2.\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2(x^2y)^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2V^2}\Rightarrow S_{tp}\ge 3\pi\sqrt[3]{2V^2}$$

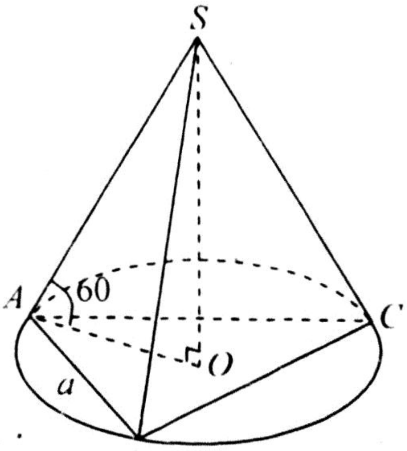
Dấu đẳng thức có khi $x^2=\frac{xy}{2}=\frac{V}{2\pi}\Leftrightarrow\left(x=\sqrt{\frac{V}{2\pi}};y=2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}\right)$

Vậy $\min S_{tp}=3\pi\sqrt[3]{2V^2}$. Đó là diện tích toàn phần của trụ mà cả đường kính đáy bằng chiều cao cùng bằng $\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$.

Bài toán 2. Tính các diện tích, thể tích liên quan với mặt nón, khối nón

Thí dụ 21. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên nghiêng trên đáy một góc 60^0. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp ấy.

Lời giải



Hình 39

Gọi O là trọng tâm ΔABC, R là bán kính đáy hình nón.

Trong tam giác đều ABC ta có $BC=2R\sin A$

$\Leftrightarrow a=2R\sin 60^0\Rightarrow R=\frac{a}{\sqrt{3}}$

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có

+ $SO=OA\tan 60^0=R\tan 60^0=a$.

+ $SA=\frac{OA}{\cos A}=\frac{a}{\sqrt{3}}.2=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

- Diện tích xung quanh của hình nón là

$S_{xq}=\pi Rl+\pi R^2=\pi.R.SA+\pi R^2$

$=\pi.\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{3}}+\pi\frac{a^2}{3}=\frac{2\pi a^2}{3}+\pi\frac{a^2}{3}=a^2\pi$

- Thể tích của hình nón là $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi R^2.SO=\frac{\pi}{3}.\frac{a^2}{3}.a=\frac{a^3\pi}{9}$.

Thí dụ 22. Cho hình nón có bán kính đáy $r=25$, đường cao $h=20$. Tính diện tích thiết diện đi qua đỉnh của hình nón, biết rằng thiết diện cách tâm đáy một khoảng $d=12$.

Lời giải

(h.41). Gọi O là tâm đáy, I là trung điểm AB, thì $SI\perp AB$, $OI\perp AB$ (do ΔSAB, ΔOAB là các tam giác cân). Trong ΔSOI vuông tại O ta có :

+) $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{12^2}=\frac{1}{20^2}+\frac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{12^2}-\frac{1}{20^2}\Rightarrow OI=15$.

+) $SI.OH=SO.OI\ (=2s_{\Delta SOI})\Leftrightarrow SI.12=20.15$

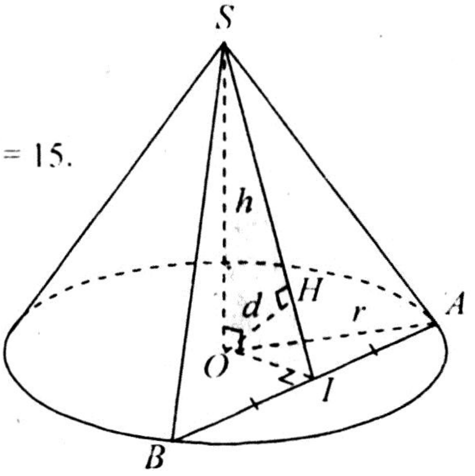
$\Rightarrow SI=25$.

- Ta lại có $AI^2=OA^2-OI^2=25^2-15^2=20^2$

$\Rightarrow AI=20$

- Vậy thiết diện SAB có diện tích là

$S_{\Delta SAB}=AI.SI=20.25=500$



Hình 41

Thí dụ 23. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng a.

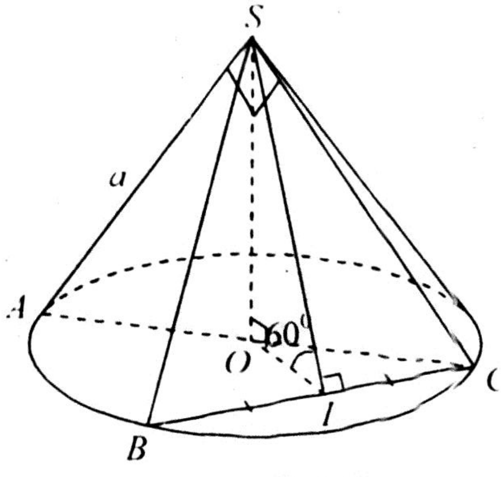
1) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

2) Tính diện tích của thiết diện qua đỉnh hình nón và tạo với đáy một góc 30^0.

Lời giải

(h.40) Gọi O, R. theo thứ tự là tâm, bán kính đường tròn đáy, $h = SO$ là đường cao, $l = SA = a$ là đường sinh.

Dễ thấy $R = OA = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$



Hình 40

1) Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi.\frac{a}{\sqrt{2}}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$$

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$$

2) Gọi I là trung điểm BC, thì $OI \perp BC$ và $\widehat{SIO} = 60^0$.

Trong ΔSOI vuông tại O ta có $SI = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$, $OI = \frac{SI}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Trong ΔOIC vuông tại I ta có $IC = \sqrt{OC^2 - OI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Diện tích thiết diện là $S_{\Delta SBC} = IC.SI = \frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$

Lời bình: Bạn có thể đặt câu hỏi : Liệu thiết diện SBC có tồn tại hay không ?

Ta có $OI = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \frac{a\sqrt{2}}{2} = R \Rightarrow I$ là điểm nằm trong đường tròn (O) nên thiết diện ABC tồn tại. "*Xanh vỏ, đỏ lòng*" : Bề ngoài nhiều khi người ta cũng cần "*quên đi*" những điều như vậy nhưng bên trong chẳng ai quên đâu. Các bạn theo dõi Thí dụ tiếp theo.

Thí dụ 24. Cho hình nón có bán kính đáy bằng R, đường cao bằng $SO = h$. Một đường thẳng (d) cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B. Xác định vị trí của (d) để tam giác SAB có diện tích lớn nhất.

Lời giải

(h.42) Gọi I là trung điểm BC, thì $OI \perp BC$. Gọi $x = OI$.

Trong ΔSOI vuông tại O ta có $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{h^2 + x^2}$

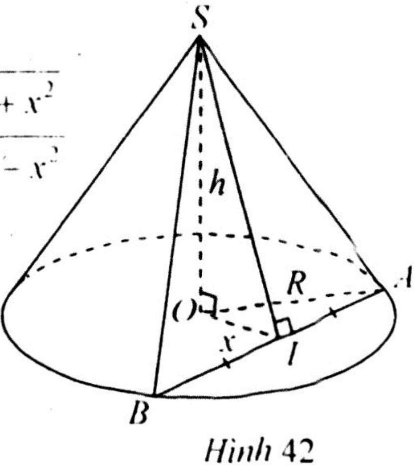
Trong ΔOIA vuông tại I ta có: $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$

Diện tích ΔSAB là $s_{\Delta SAB} = SI.IA = \sqrt{(h^2 + x^2)(R^2 - x^2)}$

+ Khi $R \geq h$, theo bất đẳng thức

Cô-si ta có $\sqrt{(h^2 + x^2)(R^2 - x^2)} \leq \frac{h^2 + R^2}{2}$

Dấu đẳng thức có khi $h^2 + x^2 = R^2 - x^2$



Hình 42

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{R^2 - h^2}{2}}$. Suy ra $\max s_{\Delta SAB} = \dfrac{h^2 + R^2}{2}$.

+ Khi $R < h$ ta có $\sqrt{(h^2 + x^2)(R^2 - x^2)} = \sqrt{h^2R^2 - (h^2 - R^2)x^2 - x^4} \leq hR$. Dấu đẳng thức có khi $x = 0$. Suy ra $\max s_{\Delta SAB} = hR$.

- Tóm lại diện tích tam giác SAB đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng (d) đi qua tâm O nếu $R < h$ hoặc cách O một khoảng $x = \sqrt{\dfrac{R^2 - h^2}{2}}$ nếu $R \geq h$.

Lời bình: Thay vì cách đánh giá, các bạn có thể tìm cực trị của biểu thức $f(x) = (h^2 + x^2)(R^2 - x^2)$

$\Leftrightarrow f(x) = h^2 R^2 - (h^2 - R^2)x^2 - x^4$ theo phương pháp khảo sát hàm số bằng đạo hàm.

Bài toán 3. Mặt trụ, mặt nón cố định của một đường thẳng biến thiên

Thí dụ 25. Cho hai điểm A, B, mặt phẳng (P), $A \in (P)$, $B \notin (P)$, H là hình chiếu của B trên (P), $H \neq A$. Xét M là một điểm biến thiên trên mặt phẳng (P) sao cho luôn có $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Chứng minh khi đó điểm M luôn nằm trên một mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

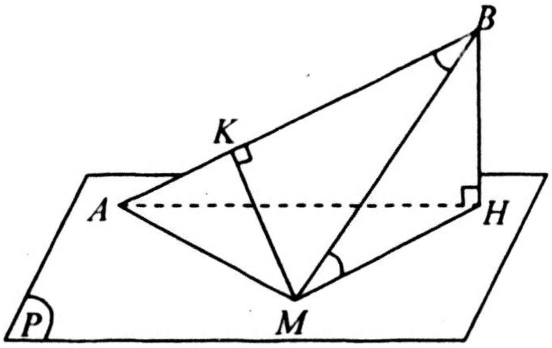
Lời giải

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng AB.

Hai tam giác vuông BHM và MKB có chung cạnh huyền MB và $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$ nên

$\Delta BHM = \Delta MKB \Rightarrow$ MK = BH (const)

Vậy khi biến thiên trong mặt phẳng (P) điểm M luôn cách đường thẳng AB một khoảng không đổi bằng BH nên M nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng AB, bán kính bằng BH. (đpcm)



Hình 45

Thí dụ 26. Cho hình nón đỉnh S, bán kính R, góc ở đỉnh hình nón là 2α, $45^0 < \alpha < 90^0$

1) Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón.

2) Tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.

3) Một mặt phẳng qua đỉnh của hình nón tạo với đáy một góc β, cắt hình nón theo hai đường sinh SA, SB. Chứng minh khi mặt phẳng thay đổi, đường trung tuyến SI của ΔABC luôn thuộc một *mặt nón* cố định.

Lời giải

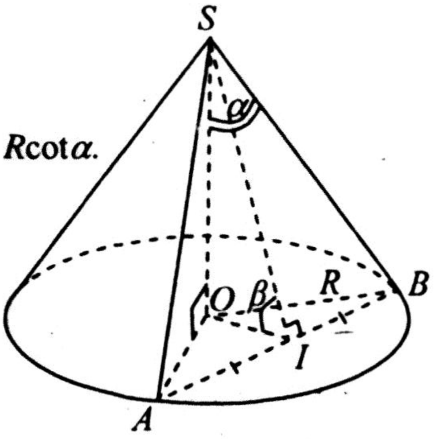
1) Theo giả thiết ta có $\widehat{OSA} = \alpha$.(h.42)

Trong ΔSOA vuông tại O có $SA = \dfrac{OA}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$, $SO = R\cot\alpha$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi R.SA = \pi.R.\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$$

Thể tích khối nón là



Hình 42

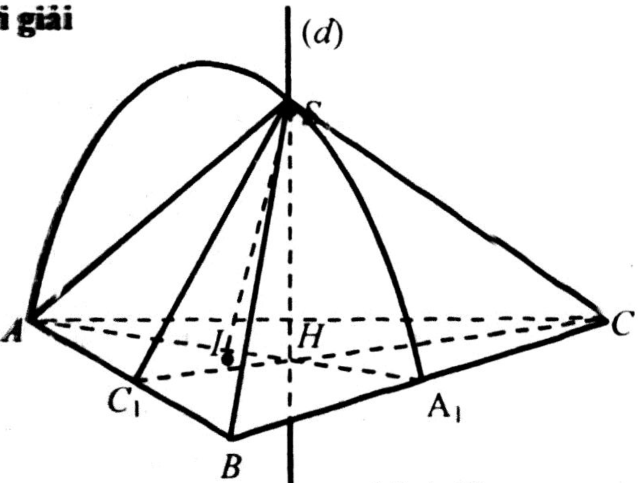
$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.SO=\frac{1}{3}\pi R^2.R\cot\alpha=\frac{1}{3}\pi R^3\cot\alpha$$

2) Diện tích thiết diện *SAB* (có $\widehat{ASB}=90^0$) là $S_{TD}=\frac{1}{2}SA.SB=\frac{R^2}{2\sin^2\alpha}$

3) *SI* là trung tuyến của $\Delta SAB\Rightarrow AB\perp SI,\ AB\perp OI$ Đặt $\widehat{SIO}=\beta$. Trong tam giác *SOI* vuông tại *O* ta có $IO=SO\cot\beta=R\cot\alpha\cos\beta\ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm *O* bán kính $r=R\cot\alpha\cos\beta$. Bởi điểm *S* và ($\mathscr{C}$) cố định nên khi dây cung *AB* thay đổi thì *SI* nằm trên mặt nón có đường cao là *SO* và đáy là đường tròn ($\mathscr{C}$) :

> **Thí dụ 27.** Cho tam giác đều *ABC* có cạnh bằng *a*, hai điểm *A*, *B* cố định. Kí hiệu AA_1 là đường cao và (*d*) là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trong mặt phẳng chứa (*d*) và AA_1, xét đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính AA_1. Gọi $S=(d)\cap(\mathscr{C})$.
>
> 1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp *SABC*.
>
> 2) Chứng minh rằng khi *C* thay đổi thì điểm *S* thuộc một đường tròn cố định và mỗi đường thẳng *SA*, *SB* thuộc một *mặt nón* cố định.

Lời giải



Hình 43

1) (h.43). Hình nón ngoại tiếp hình chóp *SABC* thì có đáy là ΔABC, đường cao là *SH*, đường sinh là *SC* và diện tích xung quanh được tính :

$$S_{xq}=\pi.HC.SC\qquad(1)$$

Gọi C_1, *I* lần lượt là trung điểm *AB*, A_1A. Ta có: $SI=\frac{A_1A}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$IH=\frac{A_1A}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{12}$$

$$HC=\frac{2}{3}C_1C=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}\qquad(2)$$

$$SH^2=SI^2-IH^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2=\frac{a^2}{6}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{6}}{6}\qquad(3)$$

$$SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\sqrt{\frac{a^2}{6}+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\qquad(4)$$

Thay (2), (4) vào (1) có $S_{xq}=\pi.\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{6}$

- Thể tích của khối chóp phải tính là

$$V=\frac{1}{3}\pi HC^2.SH=\frac{\pi}{3}.\frac{a^2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{54}$$

2) Trong ΔSHC_1 vuông tại *H* ta có $SC_1^{\ 2}=SH^2+HC_1^{\ 2}=\frac{a^2}{6}+\frac{a^2}{12}=\frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow SC_1 = \frac{a}{2}$. Thấy rằng S thuộc mặt phẳng trung trực của AB và $SC_1 = \frac{a}{2}$ nên S thuộc đường tròn (C_1) nằm trong mặt phẳng trung trực của AB và có tâm là C_1, bán kính bằng $\frac{a}{2}$.

Cũng từ trên suy ra :

+ SA thuộc mặt nón cố định có đỉnh là A, đáy là đường tròn (C_1). (đpcm)
+ SB thuộc mặt nón cố định có đỉnh là B, đáy là đường tròn (C_1). (đpcm)

BÀI TẬP 2

Mặt cầu, khối cầu

2.1. Cho hình thang $ABCD$ vuông góc ở A và D: $AB = AD = a$, $DC = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại D lấy điểm S sao cho $SD = a$.

1) Các mặt bên hình chóp là tam giác gì?

2) Xác định tâm và bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, B, C, D.

2.2. Cho mặt cầu $S(O; r)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng của I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu vuông góc với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (P) tại A và B. Chứng minh rằng : $AB^2 = AI^2 + IB^2$.

2.3 Cho một hình cầu bán kính R. (Δ) là giao tuyến của mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng bằng h $(0 < h < R)$. A là một điểm cố định trên (Δ). Một góc vuông $\widehat{xAy}$ quanh quanh A trong mặt phẳng (P). Các tia Ax, Ay cắt (Δ) ở C và D, đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng (P) cắt mặt cầu ở B.

1) Chứng minh các tổng $AD^2 + BC^2$ và $AC^2 + BD^2$ là một số hằng.

2) Gọi H là hình chiếu của B trên CD. Chứng minh H thuộc một đường tròn cố định .

3) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích $ABCD$.

2.4. Cho $SABC$ là hình chóp đều nội tiếp trong hình cầu (O, R).

1) Xác định khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) để $SABC$ là tứ diện đều và tính thể tích của nó trong trường hợp ấy.

2) Kẻ đường kính SS'. Chứng minh nếu $SABC$ là hình chóp đều thì $S'A$, $S'B$, $S'C$ đôi một vuông góc với nhau và thể tích tứ diện $SABC$ gấp đôi thể tích tứ diện $S'ABC$.

2.5. Cho ABC là tam giác đều cạnh a, $(\mathscr{C})$ là đường tròn đường kính BC nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Giả sử S là một điểm thay đổi trên đường tròn $(\mathscr{C})$.

1) Chứng minh $SA^2 + SB^2 + SC^2$ là một số hằng.

2) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ cố định.

2.6. Cho hình lăng trụ đứng có chiều cao h không đổi, đáy là tứ giác $ABCD$ trong đó A, B, C, D thay đổi và $IA.IC = IB.ID = -h^2$, với I là giao điểm của hai đường chéo. Xác định giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

2.7. Cho tam giác ABC vuông ở A, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^0$. Xét hai tia Bx, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

1) Xác định điểm B_1 trên Bx sao cho mặt cầu đường kính BB_1 tiếp xúc với Cy.

Xác định điểm C_1 trên Cy sao cho mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx.

2) Với các điểm B_1, C_1 tìm được ở trên, hỏi đa diện $ABCC_1B_1$ có mặt cầu ngoại tiếp không ? Hãy tính thể tích của khối đa diện ấy.

2.8 Chứng minh nếu tứ diện có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau thì cả 6 cạnh của diện cùng tiếp xúc với một mặt cầu.

2.9. Cho một góc tam diện vuông $Oxyz$. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C.

1) Hãy tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) theo $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

2) Giả sử điểm A cố định, còn B và C thay đổi nhưng luôn luôn thoả mãn $OA = OB + OC$. Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ là lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là nhỏ nhất.

2.10 Cho hai tia Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, AB là đường vuông góc chung, $AB = a$. Trên Ax lấy C : $AC = x$, trên By lấy D sao cho $BD = y$.

1) Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a, x, y.

2) Khi C, D thay đổi trên Ax, By sao cho $x + y = CD$, chứng minh CD luôn tiếp xúc với một mặt cầu đường kính AB.

3) Với điều kiện ở câu 2, hãy xác định C (hoặc D cho tứ diện $ABCD$ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Mặt trụ, khối trụ

2.11(P) Tính diện tích toàn phần và thể tích tích của hình trụ, biết rằng thiết diện qua trục của nó là một hình vuông có diện tích bằng 12.

2.12 Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu có bán kính bằng a. Hãy tính :

1) Thể tích hình trụ. 2) Diện tích thiết diện qua trục của hình trụ.

2.13. Cho hình lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng a, đường cao bằng h. Tính diện tích và thể tích các hình trụ nội tiếp, hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ ấy.

2.14. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, trục OO' bằng h. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua O tạo với đáy một góc α cho trước và cắt hai đáy của hình trụ đã cho theo các dây AB và AD (dây AB đi qua O).

1) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

2) Chứng minh hình chiếu vuông góc H của điểm O' trên mặt phẳng (P) thuộc một đường tròn cố định.

2.15. Tìm hình trụ có thể tích lớn nhất trong các hình trụ có tổng diện tích toàn phần bằng không đổi.

2.16(P). Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính R, có đường cao bằng h. Gọi A, B theo thứ tự là hai điểm hay đổi trên hai đường tròn (O), (O') sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và $O'B$ luôn bằng φ cho trước.

1) Tính thể tích V của tứ diện O_1OAB. Tìm giá trị lớn nhất của V.

2) Gọi (α) là mặt phẳng qua B và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa OO' và mặt phẳng (α).

3) Chứng minh rằng (α) là tiếp diện của mặt trụ cố định.

2.17. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$, bán kính R, có đường cao bằng $\dfrac{R\sqrt{5}}{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn $(\mathscr{C}')$. Tìm trên đường tròn $(\mathscr{C})$ hai điểm B và C sao cho ΔABC là tam giác đều.

Mặt nón, khối nón

2.18(P) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên nghiêng trên đáy một góc 60^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp ấy.

2.19(P) Cho hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng a và nghiêng trên đáy một góc α. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón nội tiếp trong hình chóp ấy.

2.20$^{(P)}$ Cho hình nón có bán kính đáy bằng R, đường cao bằng $SO = R\sqrt{3}$. Một mặt phẳng qua đỉnh hình nón tạo với mặt phẳng đáy một góc α, cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện SAB.

2.21$^{(P)}$. Cho hai điểm phân biệt A, B và một số thực $a > 0$. (d) là đường thẳng thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng bằng a. Chứng minh (d) luôn thuộc một *mặt nón cố định*.

2.22. Cho hình nón có đỉnh là S, đáy là hình tròn tâm O bán kính R, chiều cao bằng $2R$. Gọi I là một điểm nằm trên đường tròn đáy và $OI = 2R$. Trong hình tròn (O) kẻ bán kính $OA \perp OI$. Đường thẳng OI cắt đường tròn (O) tại B.

1) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón.

2) M là một điểm di động trên SA, IM cắt mặt nón tại N. Chứng minh hình chiếu K của O trên IN thuộc một đường tròn đường tròn cố định đi qua trực tâm H của ΔSAI.

Bài tập cuối chương

Bài tập tự luận

2.23. Cho hình chóp $S.ABC$ đỉnh S. Cạnh bên SC nghiêng trên đáy một góc 60^0 và 6 điểm bao gồm A, B, C, các trung điểm của các cạnh bên của hình chóp cùng nằm trên một mặt cầu bán kính R. Hãy tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh S của hình chóp.

2.24. Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ lấy một điểm C tùy ý. Kẻ $CH \perp AB$ (H thuộc AB). Gọi I là trung điểm của CH. Trên một nửa đường thẳng It vuông góc tại I với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90^0$.

1) Đặt $AH = x$. Tính thể tích V của hình nón ngoại tiếp tứ diện $SABC$. Với giá trị nào của x thì V đạt giá trị lớn nhất ?

2) Chứng minh khi C biến thiên trên đường tròn đã cho thì tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

2.25$^{(P)}$. Trong các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính R cho trước. Tìm chiều cao h của hình chóp có tích xung quanh nhỏ nhất.

2.26. Cho hình chóp $S.ABC$ có các tất cả các cạnh cùng tiếp xúc với một hình cầu bán kính r và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

1) Chứng minh $S.ABC$ là hình chóp đều.

2) Tính chiều cao của hình chóp, biết $IS = r\sqrt{3}$.

2.27. Cho một mặt cầu (S) tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm di động trên (S). Hai tiếp tuyến của (S) tại M cắt (P) ở A và B.

1) Chứng minh $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

2) Gọi K là điểm đối xứng của I qua AB. Chứng minh rằng bốn điểm I, K, M, O cùng nằm trên một mặt phẳng và KM luôn đi qua một điểm cố định $J \in (S)$

2.28. Cho hình nón có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng $4R$.

1) Tính diện tích toàn phần của hình trụ nội tiếp hình nón, biết rằng bán kính đáy của hình trụ nội tiếp bằng r. (Hình trụ nội tiếp hình nón là hình trụ có một đường tròn đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón, đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón).

2) Tìm bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp hình nón để diện tích toàn phần lớn nhất.

2.29. Gọi r, h theo thứ tự là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và thể tích của khối cầu nội tiếp khối nón ấy.

1) Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ theo r và h.

2) Khi r và h thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

2.30. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu ngoại tiếp và nội tiếp một hình chóp tứ giác đều. Tìm hệ thức liên hệ giữa cạnh đáy và chiều cao của hình chóp để tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất .

Bài tập trắc nghiệm

22.1$^{(P)}$. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt cầu ngoại tiếp. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng ?

A. Tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trên đường cao SH của hình chóp.

B. Đáy $ABCD$ là một hình thoi.

C. Hai đường chéo của đáy bằng nhau.

D. Đáy $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn.

22.2$^{(P)}$ Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao $h = \frac{1}{11 + 22\sin 10^0}$, bán kính đáy $R = \frac{1}{\pi(1 - 2\sin 10^0)\cos 10^0}$ là

A. $\frac{4}{11}$;   B. $\frac{2}{\pi}$;   C. $\frac{4}{11\pi}$;   D. $\frac{2\sqrt{3}}{11}$

22.3$^{(P)}$. Nếu hình cầu có thể tích là $\frac{\pi}{3}\sin^3 a$, $a \in (0^0; 180^0)$, thì bán kính của nó là :

A. $\frac{\sqrt[3]{6\sin a - 2\sin 3a}}{2}$;   B = $\sin 3a$;

C. $\sqrt[3]{3\sin a - \sin 3a}$;   D. $\sin^3 a$.

22.4. Cạnh bên của một hình nón bằng $2a$ ($a>0$). Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120^0. Diện tích toàn phần của hình nón là :

A. $\pi a^2(3 + \sqrt{3})$;   B. $2\pi a^2(3 + \sqrt{3})$;   C. $6\pi a^2$;   D. $\pi a^2(3 + 2\sqrt{3})$.

22.5. Cho miền chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Thể tích khối tròn xoay do miền chữ nhật ấy quay xung quanh cạnh AD tạo thành là :

A. $\pi b^2 a$;   B. $\pi a^2 b$;   C. $\frac{1}{3}\pi b^2 a$;   B. $\frac{1}{3}\pi a^2 b$

22.6. Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có các kích thước a, $2a$, $4a$ ($a > 0$)) là:

A. $21\pi a^2$;   B. $843\pi a^2$;   C. $7\pi a^2$;   D. $\frac{21}{4}\pi a^2$.

22.7. Cho miền tam giác vuông tại A có $AB = 4a$, $AC = 3a$. Thể tích khối tròn xoay do miền tam giác này quay quanh đường thẳng BC tạo thành là :

A. $\frac{84\pi a^3}{15}$;   B. $\frac{120\pi a^3}{27}$;   C. $\frac{144\pi a^3}{25}$;   D. $\frac{84\pi a^3}{25}$

22.8. Thiết diện của mặt phẳng (P) tạo với hình cầu (O) có diện tích bằng 9π. Trong các số dưới đây, số nào ghi khoảng cách giữa tâm O và mp(P.), biết rằng chu vi đường tròn lớn của hình cầu bằng 10π.

A. 4;   B. 3;   C. 4π;   D. 6

22.9. Đường cao của một hình nón bằng a ($a > 0$).

Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120^0. Diện tích toàn phần của hình nón là :

A. $\pi a^2(2+\sqrt{3})$;　　B. $\pi a^2(3+3\sqrt{3})$;

C. $\pi a^2(3-\sqrt{3})$;　　D. $\pi a^2(3+2\sqrt{3})$

22.10. Cho hình tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 8$, $BC = 6$. Gọi R là bán kính *đường tròn lớn* của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ấy. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của R ?

A. 4;　　B. 5;　　C. 3;　　D. 25.

22.11. Một hình nón có đường cao $h = 9$ nội tiếp trong một hình cầu bán kính $R = 5$. Tỉ số giữa thể tích khối nón và khối cầu là :

A. $\dfrac{27}{500}$;　　B. $\dfrac{81}{500}$;　　C. $\dfrac{27}{125}$;　　D. $\dfrac{81}{125}$.

22.12$^{(P)}$ Nếu hình nón có đường cao bằng $h = a$, bán kính đáy $R = a\sqrt{3}$ thì đường sinh tạo với đáy một góc bằng :

A. 60^0;　　B. 15^0;　　C. 120^0;　　D. 30^0

22.13$^{(P)}$. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác cân có cạnh đáy bằng $\dfrac{2\tan 20^0}{\cot 50^0}$, cạnh bên bằng $\dfrac{\tan 80^0}{\pi}$. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là :

A. 3;　　B. $\pi\sqrt{3}$;　　C. $\sqrt{3}$;　　D. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

22.14 Nếu cạnh của một tứ diện đều bằng a thì hình nón ngoại tiếp nó có diện tích xung quanh là :

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$;　　B. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$;　　D. $\pi a^2\sqrt{3}$

22.15$^{(P)}$. Ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu bán kính R và $\widehat{BAC} = 90^0$. Tìm các khẳng định *đúng* trong các khẳng định sau :

A. BC là đường kính của mặt cầu.

B. Đường tròn qua A, B, C là đường tròn lớn của mặt cầu.

C. Mặt phẳng (ABC) chứa tâm mặt cầu.

D. $OI \perp (ABC)$ trong đó I là trung điểm BC.

22.16 Tìm các khẳng định *sai* trong các khẳng định sau :

Trong các hình chóp sau, hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là :

A. Hình chóp tam giác.　　B. Hình chóp tứ giác.

C. Hình chóp lục giác đều.　　D. Hình chóp đều n-giác.

22.17$^{(P)}$. Cho hai điểm phân biệt A, B và một số thực $a > 0$. Gọi $(\mathcal{H})$ là tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn $MA^2 + MB^2 \leq a$

Tìm các khẳng định *đúng* trong các khẳng định sau :

A. $(\mathcal{H})$ là hình trụ.　　B. $(\mathcal{H})$ là hình tròn.

C. $(\mathcal{H})$ là hình cầu　　D. $(\mathcal{H})$ là khối cầu.

22.18. Hình chóp $D.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $DA \perp$ mp(ABC). Nếu $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là :

A. $\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;　　B. $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

C. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$　　D. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

22.19. Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt cầu và $\widehat{ADB} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^0$
Đường kính của mặt cầu ấy là :

A. AB; B. BC;

C. AC D. DD' trong đó $DD'^2 = DA^2 + DB^2 + DC^2$

22.20$^{(P)}$. Diện tích xung quanh của một khối trụ bằng 4π. Nếu thiết diện qua trục là hình vuông thì thể tích của khối trụ ấy bằng :

A. $\frac{\pi}{3}$; B. $\frac{2\pi}{3}$; C. $\frac{4\pi}{3}$; D. $\frac{8\pi}{3}$.

22.21 Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông có cạnh bằng $2a$. Khi đó, khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ ấy có thể tích là:

A. $2a^3$; B. $3a^3$ C. $4a^3$; D. $5a^3$

22.22 Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều có cạnh bằng 2. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón sẽ có bán kính là :

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $\sqrt{3}$; C. 4; D. $2\sqrt{3}$.

22.23 Một hình nón có bán kính đáy bằng a, đường cao bằng $\frac{4a}{3}$. Gọi 2α là số đo của góc ở đỉnh hình nón. Khi đó :

A. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ B. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ C. $\tan\alpha = \frac{3}{5}$ D. $\cot\alpha = \frac{3}{5}$

22.24. Cho A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) cho trước. I là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P) và có hình chiếu vuông góc trên (P) không trùng với A.

Một đường thẳng (d) thay đổi luôn đi qua I. Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên (d). $(\mathcal{H})$ là hình chứa các điểm M khi (d) quay quanh A. Tìm các khẳng định *đúng* trong các khẳng định sau :

A. $(\mathcal{H})$ là hình cầu. B. $(\mathcal{H})$ là hình nón.

C. $(\mathcal{H})$ là mặt trụ. D. $(\mathcal{H})$ là đường tròn.

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1 HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. Kiến thức cần nhớ

1. Hệ trục toạ độ trong không gian

Trên 3 đường thẳng *Ox, Oy, Oz* đôi một vuông góc với nhau lần lượt đặt 3 véc tơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ với $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 1$ khi đó ta được một hệ trục toạ độ Đề các vuông góc, viết là *Oxyz*.

Chú ý : $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

2. Toạ độ của điểm và toạ độ của một vectơ

- Toạ độ của vectơ: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Toạ độ của điểm : $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Nếu $\begin{cases} A = (x_A; y_A; z_A) \\ B = (x_B; y_B; z_B) \end{cases}$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

3. Vectơ bằng nhau, toạ độ vectơ tổng, vectơ hiệu

Cho $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$. Khi đó

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2)$
- $\vec{u} \pm \vec{v} \Leftrightarrow (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$
- $k\vec{u} \Leftrightarrow (kx_1, ky_1, kz_1), \forall k \in \mathbb{R}$

4. Hai vectơ cùng phương

Hai vectơ $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ cùng phương ($\vec{u} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{v} = k\vec{u}$, tức là $\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \\ z_2 = kz_1 \end{cases}$ hay $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1}$

5. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$. Khi đó

- $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
- $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ với $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

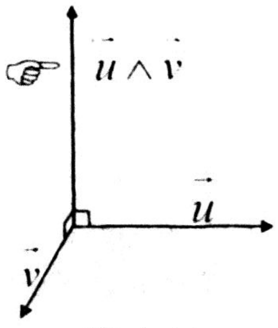
6. Tích có hướng của hai vectơ

Định nghĩa : Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ là một vectơ, kí hiệu là $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (hoặc $[\vec{u}, \vec{v}]$) được xác định bởi

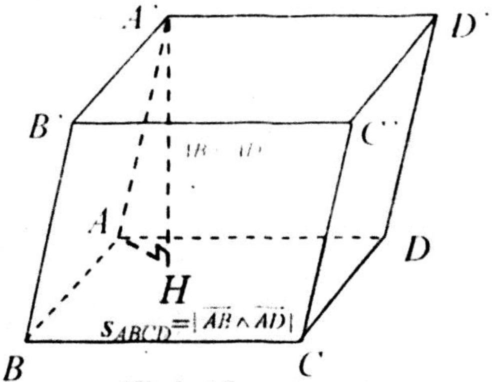
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Tính chất của vectơ tích (h.44)

- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$
- $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$



Hình 44



A'
D'
B'
C'
AB ∧ AD
A
D
H
$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|$
B
C

Hình 45

7. Ứng dụng của tích có hướng

- Diện tích tam giác : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$
- Thể tích khối hộp (h.45): $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AA'}|$
- Thể tích tứ diện : $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$

II. Các kỹ năng quan tâm

Kỹ năng 1. Xác định toạ độ vectơ thoả mãn điều kiện cho trước

Thí dụ 1. Cho ba vectơ $\vec{u} = (1; -1; 3)$, $\vec{v} = (3; -9; 0)$, $\vec{w} = (-1; 0; 2)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{x}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
2) $\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$;
3) $\vec{x} = 2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + 5\vec{w}$;
4) $\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

Lời giải

1) Ta có $\vec{x} = (x_u + x_v + x_w ; y_u + y_v + y_w ; z_u + z_v + z_w) = (1 + 3 - 1; -1 - 9 + 0; 3 + 0 + 2)$
$= (3; -10; 5)$

2) Ta có $\begin{cases} \vec{u} = (1; -1; 3) \\ \vec{v} = (3; -9; 0) \\ \vec{w} = (-1; 0; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (1; -1; 3) \\ -2\vec{v} = (-6; 18; 0) \\ 3\vec{w} = (-3; 0; 6) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (-8; -19; 9)$

3) Ta có $\begin{cases} \vec{u} = (1; -1; 3) \\ \vec{v} = (3; -9; 0) \\ \vec{w} = (-1; 0; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{u} = (2; -2; 6) \\ -\frac{1}{3}\vec{v} = (-1; 3; 0) \\ 5\vec{w} = (-5; 0; 10) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w} = (-4; 1; 16)$

4) Ta có $\vec{x} = \vec{u}.\vec{v} = \left(\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -9 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -9\end{vmatrix}\right) = (-1; 9; 6)$.

> **Thí dụ 2.** Cho ba điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; -1)$, $C(1; -5; 3)$
>
> 1) Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
>
> 2) Tìm điểm E biết rằng OE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là OA, OB, OC.

Lời giải

1) Giả sử D có toạ độ là $D = (x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1; -1; 3)$,

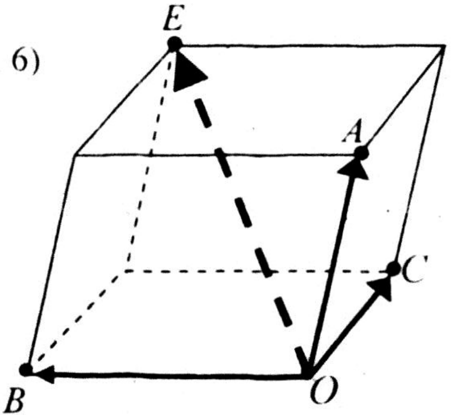
$\overrightarrow{CD} = (x - 1; y + 5; z - 3)$, $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y + 5 = -1 \\ z - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \\ z = 6 \end{cases}$. Vậy $D = (0; -6; 6)$

2) (h.46). OE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là OA, OB, OC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1;-1;2) \\ \overrightarrow{OB} = (2;0;-1) \\ \overrightarrow{OC} = (1;-5;3) \end{cases}$



Hình 46

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (4;-6;4) \Rightarrow \overrightarrow{OE} = (4;-6;4) \Rightarrow E = (4; -6; 4)$.

> **Thí dụ 3.** 1) Cho $\vec{a} = (3;\ 2\sqrt{x},\ x)$, $\vec{b} = (1; -1; \sqrt{3})$, tìm x để $|\vec{a}| \le |\vec{b}|$.
>
> 2) Cho $\vec{a} = (x^2; 6x, \frac{12}{\sqrt{7}})$, $\vec{b} = (1; -1; \sqrt{7})$, tìm x để $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{b}|$

Lời giải

1) Ta có $|\vec{a}| \le |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}^2 \le \vec{b}^2 \Leftrightarrow 9 + 4x + x^2 \le 1 + 1 + 3 \Leftrightarrow 4 + 4x + x^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (2 + x)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

2) Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{b}| \Leftrightarrow x^2.1 + 6x(-1) + \frac{12}{\sqrt{7}}.\sqrt{7} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 7}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

> **Thí dụ 4.** Tìm x để $\vec{a} \perp \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau :
>
> 1) $\vec{a} = (x; 2 - \sqrt{3}; x)$, $\vec{b} = (x; 2 + \sqrt{3}; 2)$
>
> 2) $\vec{a} = (\sin x; \sqrt{3}; -4\tan^3 x)$, $\vec{b} = (3; -\frac{1}{2}; \cos^3 x)$.
>
> 3) $\vec{a} = (\log_2 3; 4\log_2 3; \log_2(\sqrt{2} - 1))$, $\vec{b} = (\log_3 x; \log_3 \frac{1}{4}; \log_2(\sqrt{2} + 1))$

Lời giải

Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$ (*)

1) Với $\vec{a} = (x; 2 - \sqrt{3}; x)$, $\vec{b} = (x; 2 + \sqrt{3}; 2)$ ta có

(*) $\Leftrightarrow x.x + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$.

2) Với $\vec{a} = (\sin x;\ \sqrt{3}\ ; -4\tan^3 x)$, $\vec{b} = (3;\ -\frac{1}{2}\ ; \cos^3 x)$ ta có

$$(*) \Leftrightarrow 3\sin x + \sqrt{3}.(-\frac{1}{2}) - 4\tan^3 x.\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin 60^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20^0 + k60^0 \\ x = 40^0 + l60^0 \end{array}\right.,\ k,\ l \in \mathbb{Z}$$

3) Với $\vec{a} = (\log_2 3;\ \log_2 3;\ \log_2(\sqrt{2} - 1))$, $\vec{b} = (\log_3 x;\ \log_3 \frac{1}{3}\ ; \log_2(\sqrt{2} + 1))$

ta có $(*) \Leftrightarrow \log_2 3.\log_3 x + \log_2 3.\log_3 \frac{1}{3} + \log_2(\sqrt{2} - 1)\log_2(\sqrt{2} + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 \frac{1}{3} + \log_2 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x - 3 + 0 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Kỹ năng 2. Xác định góc giữa hai vectơ

Thí dụ 5. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $\vec{u} = (2; -1; -2)$, $\vec{v} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$ 2) $\vec{u} = (2;\ 1;\ -1); \vec{v} = (1;\ 2;\ 1)$.

3) $\vec{u} = (\ 3; -1;\ 2)$, $\vec{v} = (2;\ 16;\ 5)$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

1) với $\vec{u} = (2;\ 1; -2)$, $\vec{v} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$ ta có

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{|2\sqrt{2} - 1(-\sqrt{2}) - 2.0|}{\sqrt{(2^2 + 1^2 + (-2)^2)(2 + 2 + 0)}} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$$

2) với $\vec{u} = (2;\ 1;\ -1); \vec{v} = (1;\ 2;\ 1)$ ta có

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{|2.1 + 1.2 - 1.1|}{\sqrt{(2^2 + 1^2 + (-1)^2)(1^2 + 2^2 + 1^2)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$$

3) với $\vec{u} = (\ 3; -1;\ 2)$, $\vec{v} = (2;\ 16;\ 5)$ ta có

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{|3.2 - 1.16 + 2.5|}{\sqrt{(3^2 + (-1)^2 + 2^2)(2^2 + 16^2 + 5^2)}} = 0 \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$$

Thí dụ 6. Cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 2)$, $\vec{v} = (x; -3; 0)$. Xác định x để góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 30^0.

Lời giải

Ta có $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{|1.x - 2(-3) + 2.0|}{\sqrt{(1^2 + (-2)^2 + 2^2)(x^2 + (-3)^2 + 0^2)}} = \dfrac{|x + 6|}{3\sqrt{x^2 + 9}}$

Theo giả thiết $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30^0 \Rightarrow \cos 30^0 = \dfrac{|x + 6|}{3\sqrt{x^2 + 9}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{|x + 6|}{3\sqrt{x^2 + 9}}$

$$\Rightarrow 3(x^2 + 9) = (x + 6)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{11}$$

Kỹ năng 3. Chứng minh hai vectơ cùng phương, chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi xảy ra một trong hai điều kiện sau

1) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$ 2) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Thí dụ 7. Tìm ba điểm thẳng hàng trong mỗi bộ ba điểm A, B, C sau đây:

1) $A = (1; 1; -2)$, $B = (0; 2; -7)$, $C = (2; 5; 3)$
2) $A = (-1; -7; 2)$, $B = (5; 4; 8)$, $C = (3; 5; 10)$
3) $A = (-1; 3; 3)$, $B = (3; 3; 1)$, $C = (5; 4; 8)$.

Lời giải

1) Ta có $\overrightarrow{AC} = (2 - 1; 5 - 1; 3 + 2) = (1; 4; 5)$

$\overrightarrow{AB} = (0 - 1; 2 - 1; -7 + 2) = (-1; 1; -5)$

Cách 1 : Thấy rằng $\dfrac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} \neq \dfrac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng

Cách 2 : Ta có $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-25; 0; 5) \neq \vec{0}$

$\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

2) $A = (-1; -7; 2)$, $B = (5; 4; 8)$, $C = (3; 5; 10)$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (3 + 1; 5 - 7; 10 - 2) = (4; -2; 8)$

$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 5 - 4; 4 - 8) = (-2; 1; -4)$

Cách 1 : Thấy rằng $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Chú ý : Một cách trình bày khác của cách 1

Thấy rằng $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{-2}{1} = \dfrac{8}{-4}$ tức là $\dfrac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Cách 2 : Ta có $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0;\ 0;\ 0) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

3) $A = (-1; 3; 3)$, $B = (3; 3; 1)$, $C = (5; 4; 8)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 + 1; 3 - 3; 1 - 3) = (4; 0; -2)$

$\overrightarrow{AC} = (3 - 5; 5 - 4; 4 - 8) = (-2; 0; 1)$

Cách 1 : Thấy rằng $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Chú ý : Bạn không được viết $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{0}{0} = \dfrac{-2}{1} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng, bởi không có phép chia cho số 0.

Cách 2 : Ta có $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0;\ 0;\ 0) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Kỹ năng 4. Chứng minh 3 vectơ đồng phẳng, 4 điểm đồng phẳng

- Ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng khi và chỉ khi xảy ra một trong hai điều kiện sau

1) $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$ 2) $\exists\ (x, y) \in \mathbb{R} : \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

- Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ đồng phẳng

Thí dụ 8. Tìm các ba vectơ đồng phẳng trong mỗi bộ ba vectơ sau đây :

1) $\vec{u} = (1; 0; -2)$, $\vec{v} = (3; 5; 0)$, $\vec{w} = (5; 5; -4)$.

2) $\vec{u} = (1; 0; -2)$, $\vec{v} = (4; 2; 1)$, $\vec{w} = (3; 1; 2)$.

3) $\vec{u} = (5; 0; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 3)$, $\vec{w} = (2; -1; 1)$.

Lời giải

1) Xét ba vectơ $\vec{u} = (1; 0; -2)$, $\vec{v} = (3; 5; 0)$, $\vec{w} = (5; 5; -4)$

Cách 1. Ta có $\vec{u}.\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = (10; -6; 5)$.

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 10.5 - 6.5 + 5(-4) = 0 \Rightarrow$ ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

Cách 2. Dễ thấy $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v} \Rightarrow$ ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng .

2) Xét ba vectơ $\vec{u} = (1; 0; -2)$, $\vec{v} = (4; 2; 1)$, $\vec{w} = (3; 1; 2)$.

Ta có $\vec{u}.\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (4; -9; 2)$.

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 4.3 - 9.1 + 2.2 = 7 \neq 0 \Rightarrow$ ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ không đồng phẳng.

2) Xét ba vectơ $\vec{u} = (5; 0; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 3)$, $\vec{w} = (2; -1; 1)$.

Cách 1. Ta có : $(\vec{u} \wedge \vec{v})\vec{w} = \left(2.\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 2.(-10) - 1(-10) + 1.10 = 0.$

$\Rightarrow$ ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng .

Cách 2. Dễ thấy $\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{w} \Rightarrow$ ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng .

Thí dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Hai điểm M và N sao cho $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}$). Chứng minh bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

Lời giải

(h.47). Để đơn giản cách viết ta đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Ta có :

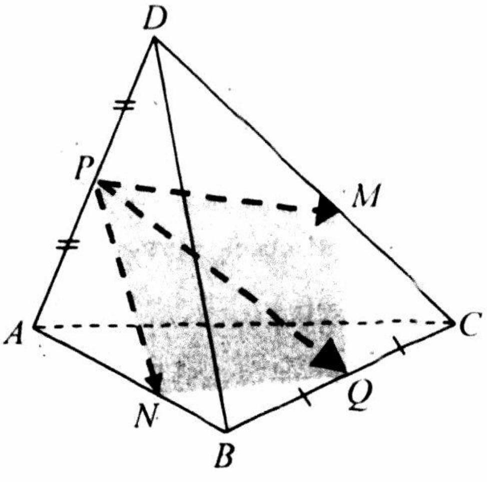
- $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DP} = k\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$
- $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{PA} + k(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}\vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a})$$

Suy ra $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = k(\vec{c} + \vec{b} - \vec{a})$ (1)

- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$$= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{a}) \qquad (2)$$



Hình 47

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{PQ} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \Rightarrow$ bốn điểm P, Q, M, N đồng phẳng.

Lời bình

- Khi $k = \frac{1}{2}$ bạn đã biết *PMQN* là hình bình hành.

  Khi $k < 0$ hoặc $k > 1$ hai điểm *M, N* nằm ngoài hình tứ diện *ABCD*.
- Bài toán còn có cách giải khác. Bạn liên hệ với Thí dụ 3§2 chương II Bồi dưỡng Hình học lớp 11, trang 37 của cùng tác giả với cuốn sách này.

Thí dụ 10. Cho bốn điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; -1)$, $C(1; -5; 3)$, $D = (0; 1; 1)$

1) Chứng tỏ *A, B, C, D* là các đỉnh của một tứ diện.

2) Tứ diện *A'B'C'D'* có $A'(1; 0; 3)$, $B'(1; 0; 2)$, $C'(3; -1; 0)$, $D' = (x; y; z)$. Tìm *x* để hai tứ diện *ABCD* và *A'B'C'D'* có cùng trọng tâm.

Lời giải

1) Ta có $\overrightarrow{DA} = (-1; 2; -1)$, $\overrightarrow{DB} = (-2; 1; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (-1; 6; -2)$,

$$\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5; -1; 3),$$

$(\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB}).\overrightarrow{DC} = -5(-1) - 1.6 + 3(-2) = -7 \neq 0 \Rightarrow$ bốn điểm *A, B, C, D* không đồng phẳng hay chúng là các đỉnh của một tứ diện. (đpcm)

2) Trước hết ta có Nhận xét:

Hai tứ diện ABCD, A'B'C'D' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0} \qquad (1)$$

Thật vậy : Gọi *G, G'* theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tứ diện *ABCD*, *A'B'C'D'* nghĩa là $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{D'G'} = \vec{0}$. Khi đó (1)

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB})$$

$$+(\overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{D'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})}_{0} + \underbrace{(\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{D'G'})}_{\vec{0}} + 4\overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow G' \equiv G$. (đpcm)

Ta có $\overrightarrow{A'A} = (0; -1; -1)$, $\overrightarrow{B'B} = (1; -1; -3)$, $\overrightarrow{C'C} = (-2; -4; 3)$,

$\overrightarrow{D'D} = (-x; 1-y; 1-z) \Rightarrow \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{D'D} = (-1-x; -5-y; -z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = 0 \\ -5 - y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy $D' = (-1; -5; 0)$

Lời bình

- Bạn có cách diễn đạt thứ hai để chứng minh Nhận xét (1) :

Với mọi điểm *T* trong không gian ta có $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TA'}) + (\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TB'}) + (\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TC'}) + (\overrightarrow{TD} - \overrightarrow{TD'}) = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} = \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} + \overrightarrow{TD'}$. Do vậy

$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} + \overrightarrow{TD'} = \vec{0}$. Bởi thế :

Nếu *T* là trọng tâm của tứ diện *ABCD* thì *T* cũng là trọng tâm của tứ diện *A'B'C'D'*

Kỹ năng 5. Tính diện tích tam giác, tính thể tích hình hộp

Thí dụ 11$^{(P)}$ Cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;-1)$, $B(1;0;-1)$, $C(1;2;3)$, $D=(1;3;1)$

1) Tính diện tích tam giác ABC.

2) Tính thể tích hình tứ diện dựng trên ba cạnh AB, AC, AD.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;4)$, $\overrightarrow{AD}=(1;3;2)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\2&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&1\\4&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\right)=(0;-4;2)$$

1) Diện tích tam giác ABC là

$$s_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-4)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$$

2) Thể tích hình tứ diện dựng trên ba cạnh AB, AC, AD là

$$V=|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|=|0.1-4.3+2.2|=8.$$

Thí dụ 12$^{(P)}$. Cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;0;-1)$, $B(1;3;0)$, $C(0;2;1)$, $D=(2;1;1)$

1) Tính diện tích các tam giác ABC, BCD.

2) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

3) Tính độ dài đường cao h_A kẻ từ A của tứ diện.

4) Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$

Lời giải

1) Ta có :

- $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2;2;2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}3&1\\2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\2&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&3\\-2&2\end{vmatrix}\right)=(4;-4;4).$

  Diện tích ΔABC là $s_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+0^2+4^2}=2\sqrt{2}$.

- $\begin{cases}\overrightarrow{DB}=(-1;2;-1)\\ \overrightarrow{DC}=(-2;1;0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-1\\0&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&2\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(1;2;3).$

  Diện tích ΔBCD là $s_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

2) Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;1;2)$, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}=4.0+0.1+4.2=8.$

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

3) Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}.h_A\Rightarrow h_A=\dfrac{3V_{ABCD}}{s_{\Delta BCD}}=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{14}}{2}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

4) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)$, $\overrightarrow{CD}=(2;-1;0)$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})=\frac{|-1.2+3(-1)+1.0|}{\sqrt{((-1)^2+3^2+1^2)(2^2+(-1)^2+0^2)}}=\frac{|5|}{\sqrt{60}}=\frac{\sqrt{15}}{12}.$$

***Kỹ năng* 6. Chứng minh quan hệ vuông góc, song song giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng phương pháp vectơ**

Cho hai đoạn thẳng AB, CD, mặt phẳng (P), $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ không cùng phương với nhau và nằm trong mặt phẳng (P).

Khi đó :

- $AB \perp CD \Leftrightarrow \vec{AB}.\vec{CD} = 0$
- $AB // (P) \Leftrightarrow \{ \vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ đồng phẳng và $AB \not\subset (P)\} \Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{AB} = \vec{0}$
- $AB \perp (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{u} \\ \vec{AB} \perp \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB}.\vec{u} = 0 \\ \vec{AB}.\vec{v} = 0 \end{cases}$

Thí dụ 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh $B'C'$ và CD sao cho $B'M = CN$. Chứng minh $AM \perp BN$

Lời giải

Cách 1.(Phương pháp toạ độ)

Giả sử cạnh của hình lập phương bằng 1. Thiết lập hệ trục toạ độ như hình vẽ. (h.48) Gọi $B'M = CN = k$, $(0 < k < 1)$

Khi đó:

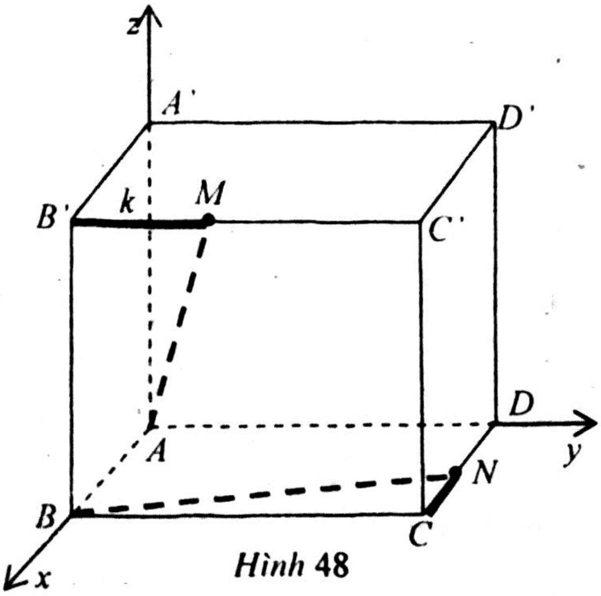
$A = (0; 0; 0)$, $\quad M = (1; k; 1)$,

$B = (1; 0; 0)$, $\quad N = (1 - k; 1; 0)$

$\Rightarrow \vec{AM} = (1; k; 1)$, $\vec{BN} = (-k; 1; 0)$

$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \Rightarrow \vec{AM}.\vec{BN} = 1.(-k) + k.1 + 1.0 = 0$

$\Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{BN} \Leftrightarrow AM \perp BN$ (đpcm)



Hình 48

Lời bình 1: Phương pháp toạ độ hình như không cần một chút thông minh nào! Chỉ cần biểu thị toạ độ các vectơ, và xét tích vô hướng của nó là thành công.

Lời bình 2: Bạn cũng có thể giải bằng phương pháp vectơ như sau:

Cách 2. (Phương pháp vectơ)

Giả sử cạnh của hình lập phương bằng 1.(h.49). Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$,

$\vec{AA'} = \vec{c}$. Thế thì $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$,

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$.

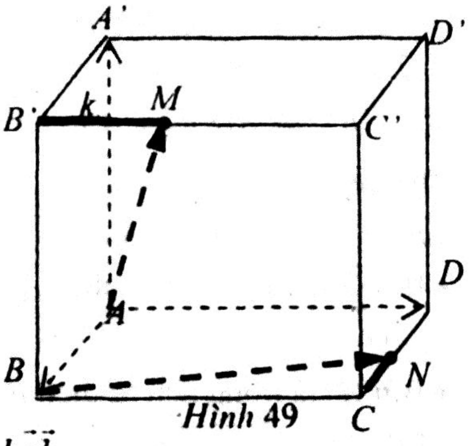
Gọi $B'M = CN = k$, $(0 < k < 1)$

$\Rightarrow \vec{B'M} = k\vec{b}, \vec{CN} = -k\vec{a}$.

Khi đó $\vec{AM} = \vec{AA'} + \vec{A'B'} + \vec{B'M}$

$= \vec{c} + \vec{a} + k\vec{b}$

$\vec{BN} = \vec{BC} + \vec{CN} = \vec{b} - k\vec{a}$



Hình 49

Do vậy $\vec{AM}.\vec{BN} = (\vec{c} + \vec{a} + k\vec{b})(\vec{b} - k\vec{a})$

$= \vec{c}\vec{b} - k\vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{b} - k(\vec{a})^2 + k(\vec{b})^2 - k\vec{a}\vec{b}$

$= 0 - 0 + 0 - k + k - 0 = 0 \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{BN} \Leftrightarrow AM \perp BN$ (đpcm)

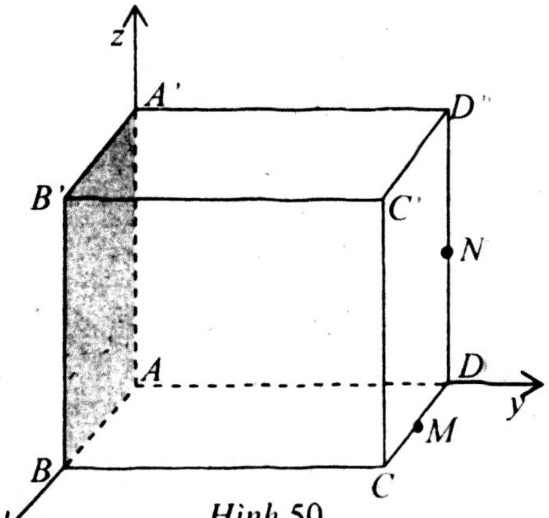
Lời bình 3: Ba vectơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đã chọn ở trên được gọi là ba "*vectơ cơ sở*". Cũng như phương pháp toạ độ, phương pháp vectơ cũng không cần một chút thông minh nào! Chỉ cần phân tích các vectơ theo các "vectơ cơ sở" và xét tích vô hướng của nó là thành công.

> **Thí dụ 14.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của CD và DD'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng GG' song song với mặt phẳng $(ABB'A')$

Lời giải

Cách 1.(Phương pháp toạ độ)

Giả sử canh của hình lập phương bằng 1. Thiết lập hệ trục toạ độ như hình vẽ. (h.50). Khi đó:



Hình 50

$A=(0;0;0)$, $A'=(0;0;1)$,
$B=(1;0;0)$, $B'=(1;0;1)$,
$C=(1;1;0)$, $C'=(1;1;1)$.
$D'=(0;1;1)$, $M=(\frac{1}{2};1;0)$;
$N=(0;1;\frac{1}{2})$,

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{AA'}=(0;0;1)$

Toạ độ trọng tâm G của tứ diện $A'D'MN$ là

$$G=\left(\frac{0+0+\frac{1}{2}+0}{4};\frac{0+1+1+1}{4};\frac{0+1+0+\frac{1}{2}}{4};\right)=(\frac{1}{8};\frac{3}{4};\frac{3}{8})$$

Toạ độ trọng tâm G' của tứ diện $BCC'D'$ là.

$$G'=\left(\frac{1+1+1+0}{4};\frac{0+1+1+1}{4};\frac{0+0+1+1}{4};\right)=(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{1}{2})$$

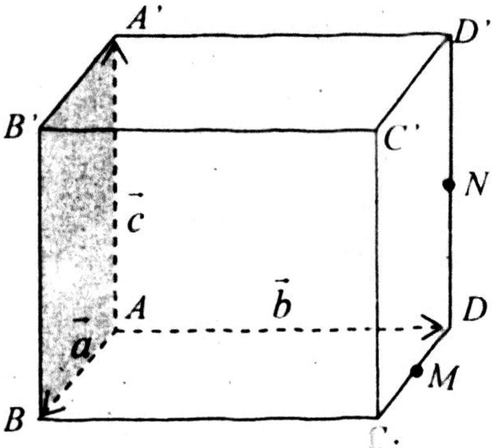
$$\Rightarrow \overrightarrow{GG'}=(\frac{5}{8};0;\frac{1}{8})\Rightarrow \overrightarrow{GG'}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AA'}$$

$\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{GG'},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}$ đồng phẳng

$(\subset(ABB'A')$

$\Rightarrow$ $GG'//(ABB'A')$ (đpcm)

Cách 2. (*Phương pháp vectơ*) (h.51)



Hình 51

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Thế thì $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$,

$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0$ và $\vec{a},\vec{c}\in(ABB'A')$

- Bởi G là trọng tâm tứ diện $A'D'MN$

nên $4\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ (1)

- Bởi G' là trọng tâm tứ diện $BCC'D'$ nên $4\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}$ (2)

Trừ theo từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta có :

$$4\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AD'}$$
$$=\vec{c}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}-\vec{a}-\overrightarrow{AC'}-\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\qquad(3)$$

Rõ ràng $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

Thay vào (3) ta có :

$$4\overrightarrow{GG'} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) + (\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}) = -\frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{GG'}, \vec{a}, \vec{c}$ đồng phẳng $\xRightarrow{\vec{a},\vec{c}\subset(ABB'A')}$ GG'// $(ABB'A')$ (đpcm)

Thí dụ 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

1) Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$.

2) Gọi M là trung điểm AD, N là trung điểm BB'. Chứng minh $A'C \perp MN$

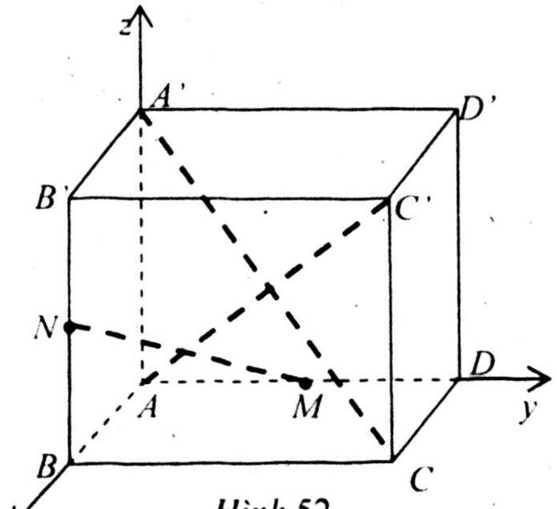
3) Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AC'}$

4) Tính thể tích tứ diện $A'CMN$.

Lời giải

Thiết lập hệ trục toạ độ như hình vẽ.(h.52). Khi đó:

$A = (0; 0 ; 0)$, $A' = (0; 0 ; a)$,
$B = (a; 0 ; 0)$, $B' = (a; 0 ; a)$,
$C = (a; a ; 0)$, $C' = (a; a ; a)$.



Hình 52

1) Ta có $\overrightarrow{A'C} = (a; a; -a)$,

$\overrightarrow{AB'} = (a; 0; a)$, $\overrightarrow{AD} = (0; a; a)$.

Suy ra

$$\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'} = a.a + a.0 - a.a = 0,$$

$$\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD} = a.0 + a.a - a.a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow A'C \perp (AB'D').$$

2) Ta có $M = (0; \frac{a}{2}; 0)$, $N = (a; 0; \frac{a}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (a; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$

Do vậy $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow A'C \perp MN$ (đpcm)

3) Ta có $\overrightarrow{AC'} = (a; a; a)$ và $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{MN}}) = \dfrac{|\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AC'}|.|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{\left|a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right|}{\sqrt{3a^2}\sqrt{\frac{3a^2}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

4) Tính thể tích tứ diện $A'CMN$ là $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A'N} \wedge \overrightarrow{A'M}).\overrightarrow{A'C}\right|$ (*)

Ta có $\overrightarrow{A'N} = (a; 0; -\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{A'M} = (0; \frac{a}{2}; -a)$ suy ra

$$\overrightarrow{A'N} \wedge \overrightarrow{A'M} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{a^2}{4}; a^2; \frac{a^2}{2} \right)$$

$$(\overrightarrow{A'N} \wedge \overrightarrow{A'M}).\overrightarrow{A'C} = \frac{a^2}{4}.a + a^2(-a) + \frac{a^2}{2}.a = \frac{3a^3}{4}$$

Thay vào (*) có $V = \frac{1}{6}.\frac{3a^3}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Lời bình: Khi phải tính góc, diện tích, thể tích thì việc gắn hệ trục toạ độ làm cho lời giải thuận lợi hơn. Tuy là không nên, nhưng nếu muốn, bạn cũng có thể giải bài toán bằng cách chọn " *hệ vectơ cơ sở* " như đã làm trong các Thí dụ trước đó.

BÀI TẬP 3

3.1$^{(P)}$. Tìm x để $\vec{a} \perp \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $\vec{a} = (2\cos 2x; \frac{1}{\cos x}; -1)$, $\vec{b} = (\frac{1}{\sin 2x}; \sin x; \frac{1}{\sqrt{3}})$

2) $\vec{a} = (\cot x; \cos 17^0; \sin 13^0)$, $\vec{b} = (\sin x; -\cos 13^0; \sin 17^0)$.

3.2. Cho ba vectơ $\vec{u} = (-1; 2; 3)$, $\vec{v} = (12; -3; 0)$, $\vec{w} = (1; 2; -2)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{x}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$;
2) $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$;
3) $\vec{x} = 3\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + 2\vec{w}$;
4) $\vec{x} = \vec{u}.\vec{v}$
5) $\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

3.3$^{(P)}$.Tìm ba điểm thẳng hàng trong mỗi bộ ba điểm A, B, C sau đây:

1) $A = (0; 1; -1)$, $B = (1; 2; 2)$, $C = (1; 1; 0)$.
2) $A = (2; 3; 4)$, $B = (1; 4; 7)$, $C = (5; 0; 4)$.
3) $A = (1; 3; 5)$, $B = (1; 7; 3)$, $C = (1; -7; 9)$.

3.4. Cho ba điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 0; -2)$, $C(1; 3; 3)$

1) Tính diện tích tam giác ABC
2) Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
3) Tìm điểm E biết rằng OE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là OA, OB, OC.
4) Tính thể tích hình hộp nói ở câu 3.

3.5$^{(P)}$. 1) Cho $\vec{a} = (x; \sqrt{3}x; 2) =$, $\vec{b} = (1; 2; \sqrt{2})$, tìm x để $2|\vec{a}| \leq |\vec{b}|$.

2) Cho $\vec{a} = (x^2; x, 0)$, $\vec{b} = (2; 3; 2\sqrt{3})$, tìm x để $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{b}|$

3.6. Xác định cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau

1) $\vec{u} = (-1; 2; 3)$, $\vec{v} = (4; 3; 1)$
2) $\vec{u} = (2; 0; -1)$, $\vec{v} = (2; 5; 4)$.

3.7$^{(P)}$. Cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; 0; 0)$, $C(3; 1; -1)$.

1) Tìm toạ độ trọng tâm ΔABC.
2) Tính đường cao AH của ΔABC.
3) Tìm độ dài đường phân giác kẻ từ A.

3.8. Tính $\vec{u} \wedge \vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau:

1) $\vec{u} = (-1; 1; 3)$, $\vec{v} = (3; 3; 1)$;
2) $\vec{u} = (1; 4; -1)$, $\vec{v} = (1; -2; 4)$;
3) $\vec{u} = (2; 6; 0)$, $\vec{v} = (7; 1; 3)$.

3.9$^{(P)}$. Tính $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau: (Cần chỉnh cho đẹp)

1) $\vec{u} = (2; 3; -1)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$, $\vec{w} = (5; 2; 1)$;
2) $\vec{u} = (1; 2; -3)$, $\vec{v} = (3; 6; -9)$, $\vec{w} = (2; 3; 5)$;
3) $\vec{u} = (0; 3; 9)$, $\vec{v} = (8; 3; 5)$, $\vec{w} = (7; 1; 3)$.

3.10. Cho bốn điểm $A(2; -1; 6)$, $B(-3; -1; -4)$, $C(5; -1; 0)$, $D(1; 2; 1)$

1) Chứng minh ΔABC là tam giác vuông.

2) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

3.12. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho $AM = CN = t.(0 < t < 2a)$.

1) Tính độ dài đoạn thẳng MN. Tìm giá trị của t để MN ngắn nhất.

2) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của của BC và SA.

3.13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M thuộc AD' và N thuộc DB sao cho $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$.

1) Tìm giá trị của x để MN ngắn nhất.

2) Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định khi x biến thiên. (mặt phẳng $A'D'BC$).

3) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của AD' và DB đồng thời MN song song với $A'C$.

3.13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của $A'D'$ và $B'B$.

1) Chứng minh rằng $IJ \perp AC'$. 2) Tính độ dài đoạn thẳng IJ.

3) Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và $A'D$.

3.14. Chứng minh các tính chất sau đây của tích vô hướng

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$; 2) $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$;

3) $(k\vec{a}) \wedge \vec{b} = k(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$; 4) $\vec{c} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{c} \wedge \vec{b}$;

5) $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$; 6) $|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 . |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$.

§2 Mặt cầu

I. Kiến thức cần nhớ

Mặt cầu tâm $I(a, b, c)$, bán kính R có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Ngược lại, xét phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \qquad (*)$$

- Nếu $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ thì (*) là phương trình mặt cầu có : tâm là $I = (-A; -B; -C)$, bán kính là $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$
- Nếu $A^2 + B^2 + C^2 - D = 0$, thì (*) cho ta duy nhất một điểm $I = (-A; -B; -C)$
- Nếu $A^2 + B^2 + C^2 - D < 0$, không có điểm nào thoả mãn (*)

II. Các bài toán thường gặp

Bài toán 1. Nhận dạng, xác định tâm và bán kính mặt cầu

Thí dụ 1$^{(P)}$. Trong các phương trình sau, cái nào là phương trình mặt cầu ? Nếu là phương trình mặt cầu, hãy cho biết tâm và bán kính.

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 8z + 17 = 0$. 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 5xy + z - 1 = 0$.

3) $x^2 + y^2 + 2z^2 + x - 3x + 7z + 4 = 0$. 4) $x^2 + y^2 + z^2 - 12y + 4z + 15 = 0$.

Lời giải

1) Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 8z + 17 = 0$. (1)

Cách 1 : Biến đổi $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 9$

Đó là phương trình mặt cầu tâm $I(-1; 3; -4)$, bán kính $R = 3$

Cách 2 : (1) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

với $A = \dfrac{2}{-2} = -1,\ B = \dfrac{-6}{-2} = 3,\ C = \dfrac{8}{-2} = -4,\ D = 17$

Ta có $\Delta = A^2 + B^2 + C^2 - D = (-1)^2 + 3^2 + (-4)^2 - 17 = 9 > 0$ nên (1) là phương trình mặt cầu tâm $I(-1; 3; -4)$, bán kính $R = \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

2) Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 5xy + z - 1 = 0$ (2)

Trong phương trình (2) có chứa hạng tử $-5xy$ nên (2) không phải là phương trình mặt cầu.

3) Xét phương trình $x^2 + y^2 + 2z^2 + x - 3x + 7z + 4 = 0$. (3)

Các hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau nên (3) không phải là phương trình mặt cầu.

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 12y + 4z + 15 = 0$. (4)

Cách 1 : Biến đổi $(4) \Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 25$

Đó là phương trình mặt cầu tâm $I(0; 6; -2)$, bán kính $R = 5$

Cách 2 : (4) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

với $A = \dfrac{0}{-2} = 0,\ B = \dfrac{-12}{-2} = 6,\ C = \dfrac{4}{-2} = -2,\ D = 15$

Ta có $\Delta = A^2 + B^2 + C^2 - D = 0^2 + 6^2 + (-2)^2 - 15 = 25 > 0$ nên (4) là phương trình mặt cầu tâm $I(0; 6; -2)$, bán kính $R = \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Chú ý

1) Trong phương trình mặt cầu

- Không có mặt hạng tử chứa ẩn xy
- Hệ số của x^2, y^2, z^2 bằng nhau. (Thường cho các hệ số ấy bằng 1)
- Các hệ số A, B, C, D có thể khuyết.

2) Điều kiện đủ để: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ (*)
là phương trình mặt cầu là: $\Delta = A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$

- Nếu $D < 0$ thì (*) ắt hẳn là phương trình mặt cầu.

Thí dụ 2$^{(P)}$. Tìm m để phương trình sau là phương trình mặt cầu :

$$x^2.\log_2 m + 3y^2 + z^2\sqrt{m+1} - 12y + 6z + m - 35 = 0 \quad (1)$$

Lời giải

- Điều kiện cần để (1) là phương trình mặt cầu là $\log_2 m = 3 \Leftrightarrow m = 8$.
- Với $m = 8$ ta có $(1) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12y + 6z - 27 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$

Đó là phương trình mặt cầu có tâm $I(0; 2; -1)$, bán kính $R = \sqrt{14}$.

Thí dụ 3$^{(P)}$. Tìm $\alpha \in (0; \dfrac{\pi}{2})$ để $R = \sqrt{3}$ là bán kính của mặt cầu có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + \frac{2z}{\cos\alpha} + 10 = 0 \quad (1)$$

Lời giải

Viết lại $(1) \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + \left(z + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \tan^2\alpha$$

Với $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ thì (2) là phương trình của mặt cầu có bán kính $R = \tan\alpha$.

Do vậy α là giá trị phải tìm khi và chỉ khi $\tan\alpha = \sqrt{3} \overset{\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{\pi}{3}$

Thí dụ 4$^{(P)}$. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z + \log_2(1 + a^2) - \log_2 a = 0$ (1)
Xác định a để phương trình (1) biểu diễn cho một mặt cầu có bán kính không bé hơn 3.

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 10 + \log_2 a - \log_2(1 + a^2)$ (2)

Nếu (2) là phương trình đường tròn thì bán kính của đường tròn ấy là

$$R = \sqrt{10 + \log_2 a - \log_2(1 + a^2)}\,.$$

Do vậy (2) biểu diễn cho một mặt cầu có bán kính không bé hơn 3 khi và chỉ khi

$\sqrt{10 + \log_2 a - \log_2(1 + a^2)} \geq 3 \Leftrightarrow 10 + \log_2 a - \log_2(1 + a^2) \geq 9$

$\Leftrightarrow 1 + \log_2 a - \log_2(1 + a^2) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 2a - \log_2(1 + a^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_2 2a \geq \log_2(1 + a^2) \Leftrightarrow 2a \geq 1 + a^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Lời bình: Yêu cầu của bài toán trên có thể diễn đạt bằng một cách khác là :

Tìm $a > 0$ để mặt cầu biểu diễn bởi phương trình (1) có bán kính nhỏ nhất.

Bài toán 2. Viết phương trình mặt cầu

Thí dụ 5$^{(P)}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là $I = (1; 0; 2)$ và thoả mãn một trong các điều kiện sau :

1) Bán kính $R = 3$. 2) Đi qua điểm $A(2; -1; 1)$.

Lời giải

1) Phương trình mặt cầu tâm $I = (1; 0; 2)$, bán kính $R = 3$ là

$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$

2) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 0; 2)$, bán kính R là

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = R^2\,. \qquad (1)$$

Điểm $A \in (S)$ khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn phương trình (1) nghĩa là

$(2-1)^2 + (-1)^2 + (2-2)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 2.$

Thay vào (1) có phương trình cần tìm là $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Thí dụ 6$^{(P)}$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB, với $A(2; -1; 3)$, $B(1; 0; 5)$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; z-3)$, $\overrightarrow{BM} = (x-1; y; z-5)$,

Điểm M thuộc mặt cầu đường kính AB khi và chỉ khi $AM \perp BM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + (y+1).y + (z-3)(z-5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 8z + 17 = 0$. Đó là phương trình mặt cầu đường kính AB.

Lời bình: Xin nhường lại cho bạn đọc lời giải theo cách : Tìm trung điểm I của AB.

Khi đó phương trình mặt cầu có tâm I, bán kính $R = \frac{AB}{2}$ chính là phương trình mặt cầu đường kính AB.

Thí dụ 7$^{(P)}$. Cho bốn điểm $A = (1; 0; 0)$, $B = (1; 1; 0)$, $C = (0; 0; 1)$, $D = (1; 1; 1)$.
Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Ta có
$$A \in (S) \Leftrightarrow 1 + A + D = 0 \qquad (2)$$
$$B \in (S) \Leftrightarrow 2 + A + B + D = 0 \qquad (3)$$
$$C \in (S) \Leftrightarrow 1 + C + D = 0 \qquad (4)$$
$$D \in (S) \Leftrightarrow 3 + A + B + C + D = 0 \qquad (5)$$

Từ (2), (3) suy ra $1 + B = 0 \Leftrightarrow B = -1$.

Từ (3), (5) suy ra $1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$.

Từ (2), (4) suy ra $A = C$, kết hợp với trên có $A = -1$.

Thay $A = -1$ vào (2) có $D = 0$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là : $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$

Thí dụ 8$^{(P)}$. Viết phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua hai điểm $A(1; -1; 0)$, $B(2; -3; 1)$ và có tâm đặt trên trục Ox.

2) Đi qua ba điểm $A(-1; 2; 0)$, $B(-2; 1; 1)$, $C(1; 0; 3)$ và có tâm đặt trên trục mặt phẳng Oyz.

Lời giải

1) Gọi $I(a;0;0)$ là một điểm thay đổi trên trục Ox, $(a \in R)$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm I có dạng : $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + D = 0$ (1)

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + (-1)^2 + 2a + D = 0 \\ 2^2 + (-3)^2 + 1^2 + 2a(-3) + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + D = 2 \\ -6a + D = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -3 \\ D = 5 \end{cases}$$

Thay vào (1) có phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5 = 0$$

2) Gọi $I(0; a; b)$ là một điểm thay đổi trên mặt phẳng Oyz, $(a, b \in R)$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm I có dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ay + 2bz + D = 0 \qquad (1)$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} 5 + 4a + D = 0 & (2) \\ 6 + 2a + 2b + D = 0 & (3) \\ 5 + 6b + D = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (2), (4) suy ra $2a = 3b$, thế vào (3) có $6 + 5b + D = 0$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b \\ 6 + 5b + D = 0 \\ 5 + 6b + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3 \\ b = 1 \\ D = -11 \end{cases}.$$

Thay vào (1) ta có phương trình phải tìm là: $x^2 + y^2 + z^2 + y + 2z - 11 = 0$

BÀI TẬP 4

4.1$^{(P)}$. Trong các phương trình sau, cái nào là phương trình mặt cầu ?

Nếu là phương trình mặt cầu, hãy cho biết tâm và bán kính.

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 5 = 0$.

2) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - y + 7yz - 1 = 0$.

3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + x + 2y + 3z + 4 = 0$.

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 12y + 2z + 28 = 0$.

5) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 + 2\sqrt{3} = 0$.

4.2$^{(P)}$. Tìm m để mỗi phương trình sau là phương trình của một mặt cầu :

1) $x^2\log_2 4m + y^2\sqrt{m+3} + 2mz^2 - 4y + 4z - 3m + 1 = 0$

2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 6y + 2z + 4m^2 - 6m + 7 = 0$

4.3$^{(P)}$. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x\sqrt{3\cos a} - 12y + 4\cos^3 a + 35 = 0$. Tìm $a \in [0; 90^0]$ để bán kính của mặt cầu đạt giá trị nhỏ nhất.

4.4$^{(P)}$. Tìm $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ để $R = \sqrt{3}$ là bán kính của mặt cầu có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - \frac{2z}{\sin\alpha} + 13 = 0$$

4.5$^{(P)}$. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x\sqrt{a} - 2z + 5a - 4\sqrt{a-1} - 3 = 0$. Xác định a để phương trình trên biểu diễn cho một mặt cầu có bán kính không bé hơn 7.

4.6$^{(P)}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là $I = (1; -1; 0)$ và thoả mãn một trong các điều kiện sau :

1) Bán kính $R = 2$.

2) Đi qua điểm $A(0; 1; 2)$.

4.7$^{(P)}$. Cho bốn điểm $A = (1; 2; 0)$, $B = (1; -1; 3)$, $C = (2; 0; 1)$, $D = (1; 0; 1)$.

1) Chứng tỏ A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

2) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

4.8$^{(P)}$. Viết phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua hai điểm $A(1; -1; 3)$, $B(1; 0; 2)$ và có tâm đặt trên trục Oy.

2) Đi qua ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(2; 0; 1)$, $C(1; -1; 3)$ và có tâm đặt trên mặt phẳng Oxz.

4.9$^{(P)}$. Cho bốn điểm $A = (1; 0; 0)$, $B = (0; 0; -4)$, $C = (2; 0; 0)$, $D = (5; 4; 0)$.
Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}| = 12.$$

§3 Phương trình mặt phẳng

I. Kiến thức cần nhớ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α) nếu giá của nó vuông góc với (α), viết tắt là $\vec{n} \perp (\alpha)$. (h.53)

- Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ là hai vectơ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì vectơ

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

2. Phương trình mặt phẳng

- Mỗi mặt phẳng đều có phương trình tổng quát là

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ \text{với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \qquad (1)$$

- Ngược lại mỗi phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ đó trong $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ đều là phương trình của một mặt phẳng.

- Mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến là $n = (A; B; C)$.
- Khi đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $n = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến thì mặt phẳng có phương trình là :

$$A(x - x_0) + B(y - x_0) + C(z - x_0) = 0 \qquad (2)$$

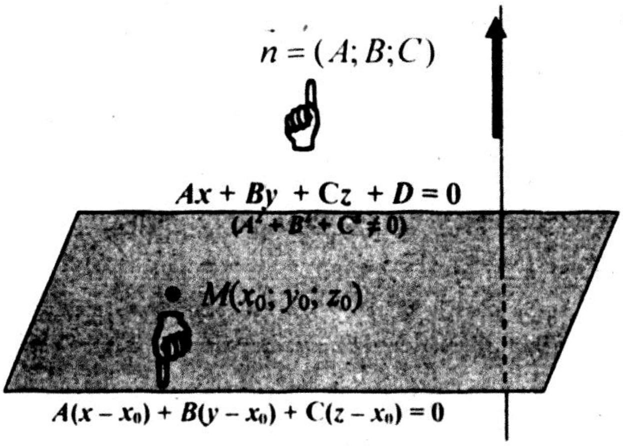
(Chúng ta luôn sử dụng (2) để lập phương trình mặt phẳng được xác định bởi một điểm và một vectơ pháp tuyến.) (h.53)

- Phương trình mặt phẳng *theo đoạn chắn*

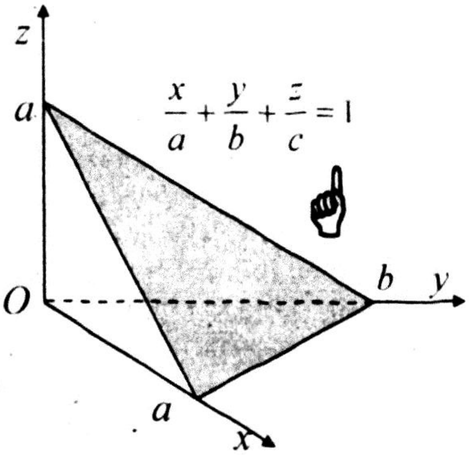
(h.54) Khi đi qua ba điểm $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì mặt phẳng có phương trình là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

Phương trình (3) được gọi là phương trình *theo đoạn chắn* của mặt phẳng (α). (Nó vẫn là phương trình tổng quát của mặt phẳng)


$n = (A; B; C)$
$Ax + By + Cz + D = 0$
$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$
$M(x_0; y_0; z_0)$
$A(x - x_0) + B(y - x_0) + C(z - x_0) = 0$

Hình 53



Hình 54

3. Các trường hợp riêng

Xét mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát dạng :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

- $D = 0$ ⇔ (α) đi qua gốc toạ độ.
- $A = 0, D \neq 0$ ⇔ (α) song song với trục Ox.

  ((3) *độc lập với ẩn nào thì song song với trục cùng tên với ẩn ấy*)
- $A = 0, D = 0$ ⇔ (α) chứa trục Ox.

  ((3) *độc lập với ẩn nào thì song song với trục cùng tên với ẩn ấy*)
- $A = B = 0, D \neq 0$ ⇔ (α) song song với mặt phẳng Oxy.

  ((3) *độc lập với 2 ẩn thì vuông góc với trục cùng tên với còn lại*)
- $A = B = D = 0$ ⇔ (α) chính là mặt phẳng Oxy.

(Các trường hợp khác cũng suy tương tự)

3. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0 \text{ và } (\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

$$(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{D'}{D}$$

$$(\alpha) \,//\, (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} \neq \frac{D'}{D}$$

$$(\alpha) \text{ cắt } (\alpha') \Leftrightarrow A' : B' : C' \neq A : B : C$$

(Đặc biệt $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$)

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Khi đó: $$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$

Khi đó khoảng cách từ M_0 đến mặt phẳng (α) là

$$\mathrm{d}(M_0;(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

II. Các bài toán và kỹ thuật cơ bản

Bài toán 1. Viết phương trình mặt phẳng

***Kỹ thuật* 1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có vectơ pháp tuyến cho trước**

Thí dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M_0 và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $M_0(5; 1; -4)$, $\vec{n} = (2; -3; 7)$. 2) $M_0(3; -2; 1)$, $= (6; 3; -21)$.

Lời giải

1) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và nhận $\vec{n} = (2; -1; 5)$ làm vectơ pháp tuyến là .

$$2(x - 5) - 3(y - 1) + 7(z + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 7z + 21 = 0$$

2) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(3; -2; 1)$ và nhận $\vec{n} = (6; 3; -21)$ làm vectơ pháp tuyến là : $6(x - 3) + 3(y + 2) - 21(z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 6x + 3y - 21z + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y - 7z + 3 = 0$$

Lời bình 1: Bạn có thể thay vectơ $\vec{n} = (6; 3; -21)$ bởi vectơ $\vec{n'} = \frac{1}{2}\vec{n} = (2; 1; -3)$

Thí dụ 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua điểm $M_0(2; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng AB trong đó $A = (1; 0, 2)$. $B = (3; -4; 8)$

2) Đi qua điểm $M_0(7; 1; 3)$ và vuông góc với trục Oz.

Lời giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 6) \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; -2; 3)$. Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB khi và chỉ khi nó nhận vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đi qua điểm $M_0(2; 1; -1)$, mặt phẳng cần tìm có phương trình là

$$1.(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 3 = 0 \ \blacksquare$$

2) Mặt phẳng vuông góc với trục Oz. khi và chỉ khi nó nhận vectơ $\vec{k} = (0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đi qua điểm $M_0(7; 1; 3)$, mặt phẳng cần tìm có phương trình là

$$0(x - 7) + 0(y - 1) + 7(z - 3) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0 \ \blacksquare$$

Lời bình 2: Thường thì người ta cho vectơ pháp tuyến *náu ẩn* trong một mặt phẳng khác có quan hệ song song hoặc vuông góc với mặt phẳng cần tìm.

Các bạn theo dõi Thí dụ tiếp theo.

Thí dụ 3. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(3; -1; 0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : 4x - 2y - z + 3 = 0$ (1)

Lời giải

1) • *Cách trình bày thứ nhất* :

* Do $(\alpha) // (\beta)$ nên (α) nhận vectơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n} = (4; -2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến.

* Phương trình mặt phẳng đi qua M_0 và nhận vectơ $\vec{n} = (4; -2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến là :

$4(x - 3) - 2(y + 1) - 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - z - 14 = 0$ (5)

So sánh (1), (5) thấy rằng $14 \neq 3$ nên (5) là phương trình của mặt phẳng (α) cần tìm.

• *Cách trình bày thứ hai* :

* Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) có dạng

$4x - 2y - z + D = 0$ với $D \neq 3$ (4)

* (α) chứa $M_0(3; -1; 0) \Leftrightarrow 4.3 - 2(-1) - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -14$ (thoả mãn)

Thay $D = -14$ vào (4) có mặt phẳng (α) cần tìm là $4x - 2y - z - 14 = 0$ ■

• *Cách trình bày thứ ba* :

* Phương trình mặt phẳng đi qua M_0 và có cùng vectơ pháp tuyến với mặt phẳng (β) là :

$4(x - 3) - 2(y + 1) - (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - z - 14 = 0$ (6)

So sánh (1), (6) thấy rằng $-14 \neq 3$ nên (6) là phương trình của mặt phẳng (α) cần tìm.

Thí dụ 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua điểm $M_0(1; -2; 5)$ và song song với mặt phẳng (β)

$2x - 3y - 5z + 1 = 0$ (1)

2) Đi qua điểm $M_0(5; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng (β) (2)

$2x + 3y - 5z - 3 = 0$

Lời giải

1) Phương trình mặt phẳng đi qua M_0 và có cùng vectơ pháp tuyến với mặt phẳng (β) là :

$2(x - 1) - 3(y + 2) - 5(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 5z + 7 = 0$ (3)

So sánh (1), (3) thấy rằng $7 \neq 1$ nên (7) là phương trình của mặt phẳng (α) cần tìm.

2) • *Cách trình bày thứ nhất* :

Thay toạ độ điểm $M_0(3; -1; 2)$ vào phương trình (2) có

$2.5 + 3.(-1) - 5.2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Suy ra điểm M_0 thuộc mặt phẳng (β) nên không tồn tại mặt phẳng (α) cần tìm.

• *Cách trình bày thứ hai* :

Phương trình mặt phẳng đi qua M_0 và có cùng vectơ pháp tuyến với mặt phẳng (β) là :

$2(x - 2) + 3(y - 1) - 5(z - 0) - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 5z - 7 = 0$ (4)

Thấy rằng (4) chính là phương trình của (β) hay mặt phẳng (β) đi qua điểm M_0. Bởi thế không tồn tại mặt phẳng (α) cần tìm.

Lời bình: $A(x - x_0) + B(y - x_0) + C(z - x_0) = 0$

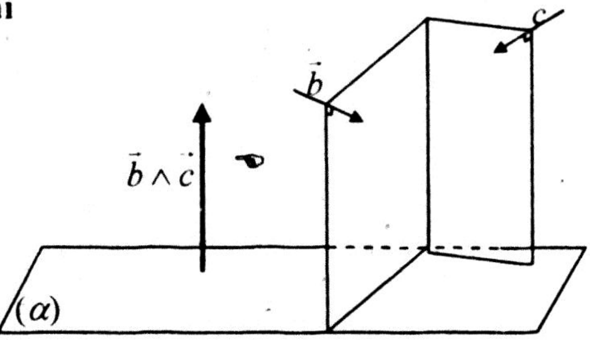
là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $(x_0; y_0; z_0)$ và có cùng có cùng vectơ pháp tuyến với mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Rất có thể hai mặt phẳng ấy trùng nhau. Việc kiểm tra hạng tử tự do của chúng để khẳng định chúng có song song với nhau hay không là *điều bắt buộc phải làm*. Các bạn thấy dụng ý ấy trong câu 3 của Thí dụ trên.

Thí dụ 5. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; -1; 2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): x - 3z + 1 = 0$ và $(\gamma): 2x + y - z + 1 = 0$

Lời giải



Hình 55

(h.55). Vectơ pháp tuyến của (β), (γ) theo thứ tự là $\vec{b} = (1; 0; -3)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$

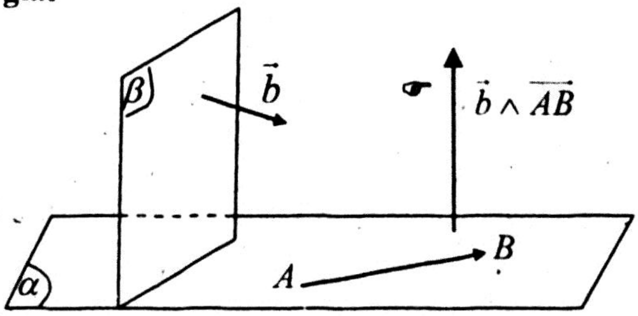
Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (β) và (γ) khi và chỉ khi (α) nhận $\vec{b}\wedge\vec{c}$ là vectơ pháp tuyến. Khi đi qua điểm A mặt phẳng (α) có phương trình là :

$$\begin{vmatrix}0&-3\\1&-1\end{vmatrix}(x-1)+\begin{vmatrix}-3&1\\-1&2\end{vmatrix}(y+1)+\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}(z-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\ 3x - 5y + z - 10 = 0$$

Thí dụ 6. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 2; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 13 = 0$

Lời giải



Hình 56

- *Cách trình bày thứ nhất* :

(h.56). Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -2)$

Vectơ pháp tuyến của mp(β) là $\vec{b} = (2; -1; 3)$

Mặt phẳng (α) đi qua A, B và vuông góc với mp(β) cũng chính là mặt phẳng đi qua A và nhận $\vec{b}\wedge\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy nên (α) có phương trình là

$$\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix}.x+\begin{vmatrix}3&2\\-2&1\end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}z=0\ \Leftrightarrow\ x-7y-3z+7=0$$

- *Cách trình bày thứ hai*:

Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm bất kì trong không gian.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (x; y - 1; z)$,

Vectơ pháp tuyến của mp(β) là $\vec{b} = (2; -1; 3)$

Điểm $M \in (\alpha)$ khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow\ (\vec{b}\wedge\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AM}=0\ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}3&2\\-2&1\end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}z=0$$

$\Leftrightarrow\ x - 7y - 3z + 7 = 0$. Đó là phương trình mặt phẳng (α) cần tìm.

***Kỹ thuật* 2. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm**

➢ Mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt được hiểu theo hai cách sau đây :

- Mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt A, B, C được hiểu là mặt phẳng đi qua một trong ba điểm A, B, C và nhận $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ làm một vectơ pháp tuyến.

- Điểm M thuộc mp(ABC) $\Leftrightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$

Tương ứng với mỗi cách hiểu ta có một cách trình bày lời giải.

➢ Nếu mỗi điểm A, B, C lần lượt nằm trên mỗi trục toạ độ, khi đó phương trình mặt phẳng *theo đoạn chắn* là lời giải hay.

Thí dụ 7$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) trong mỗi trường hợp sau :

1) $A(2; 0; 0)$, $B(1; 2; 3)$, $C(0; -1; 4)$,

2) $A(0; 1; 0)$, $B(2; 0; -1)$, $C(0; -1; 4)$.

Lời giải

1) • *Cách trình bày thứ nhất* :

Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm bất khì trong không gian.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 4)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y; z)$.

Điểm $M \in (ABC)$ khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}.(x-2) + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}.y + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.z = 0$$

$\Leftrightarrow 11x - 2y + 5z - 22 = 0$. Đó là phương trình mặt phẳng (ABC) cần tìm.

• *Cách trình bày thứ hai* :

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 4)$. Mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ làm một vectơ pháp tuyến. Do vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}(x-2) + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}(y-0) + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x - 2y + 5z - 22 = 0. \qquad (1)$$

2) Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm bất kì trong không gian.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -2; -4)$, $\overrightarrow{AM} = (x; y-1; z)$.

Điểm $M \in (ABC)$ khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}.x + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}.(y-1) + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}.z = 0$$

$\Leftrightarrow 11x - 2y + 5z - 22 = 0$. Đó là phương trình mặt phẳng (ABC) cần tìm.

Thí dụ 8$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) trong mỗi trường hợp sau :

1) $A(2; 0; 0)$, $B(0; 11; 0)$, $C(0; 0; 64)$,

2) $A(20; 0; 0)$, $B(0; 10; 0)$, $C(0; 0; 51)$.

Lời giải

1) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{11} + \dfrac{z}{64} = 1$. ■

2) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{20} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{51} = 1$. ■

Thí dụ 9$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất.

Lời giải

Giả sử $A=(a;0;0)$, $B=(0;b;0)$, $C=(0;0;c)$ với $a, b, c>0$

Thể tích tứ diện $OABC$ là $V=\frac{1}{6}OA.OB,OC=\frac{1}{6}abc$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C là : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Điểm $M\in(\alpha)\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$. Theo bất đẳng thức Cô- si :

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Leftrightarrow 1\ge\frac{27.6}{abc}\Leftrightarrow\frac{abc}{6}\ge 27\Rightarrow V\ge 27$$

Dấu đẳng thức có khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\{a=3, b=6, c=9\}$

Vậy $\min V=27$ ứng với $a=3$, $b=6$, $c=9$.

Khi đó mặt phẳng cần tìm có phương trình : $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$

***Kỹ thuật* 3. Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và giao tuyến của hai mặt phẳng cho trước**

Bạn có thể giải theo hai cách sau

Cách 1. Tuỳ chọn hai điểm trên giao tuyến, cùng với một điểm đã biết thế là bạn có ba điểm không thẳng hàng. Dùng kỹ thuật 2 để viết phương trình mặt phẳng cần tìm.

Cách 2. Lời giải cách 2 dựa vào lập luận sau đây

Nếu có đẳng thức $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ (với $A^2+B^2+C^2+D\neq 0$)

thì $Ax+By+Cz+D=0$

là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$

Thí dụ 10$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;-1)$ và giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): 2x+y-3=0,\qquad (\beta): x-3y+z+1=0.$

Lời giải

Cách 1 (h.57) . Gọi $(\Delta)=(\alpha)\cap(\beta)$. Xét hệ $(*)\begin{cases}2x+y-3=0\\ x-3y+z+1=0\end{cases}$.

Cho $x=1$, từ (*) suy ra $y=z=1$ ta có $A(1;1;1)$ là một điểm thuộc (Δ)

Cho $x=0$, từ (*) suy ra $y=3$; $z=8$ ta có $B(0;3;8)$ là một điểm thuộc (Δ) Mặt phẳng đi qua điểm M và (Δ) là mặt phẳng (ABM).

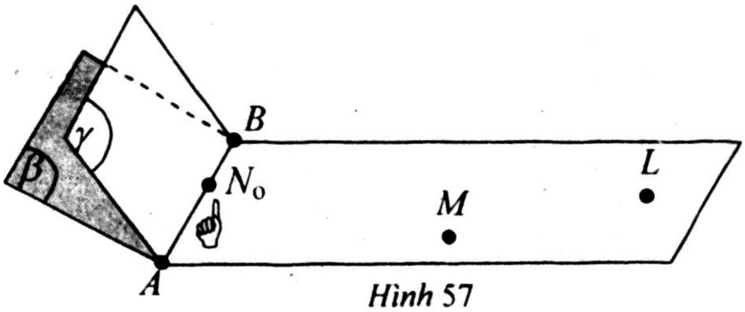
Gọi $L(x;y;z)$ là một điểm bất khi trong không gian.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;7)$, $\overrightarrow{AM}=(0;-1;-2)$, $\overrightarrow{AL}=(x-1;y-1;z-1)$

Điểm L thuộc mặt phẳng cần tìm khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AL}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AL}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2&7\\-1&-2\end{vmatrix}(x-1)+\begin{vmatrix}7&-1\\-2&0\end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix}-1&2\\0&-1\end{vmatrix}(z-1)=0$$

$\Leftrightarrow 3x-2y+z-2=0$ ■



Hình 57

Cách 2 (h.57) .

Với mọi điểm $N_0(x_0; y_0 ; z_0)$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) ta có

$$2x_0 + y_0 - 3 = x_0 - 3y_0 + z_0 + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $m(2x_0 + y_0 - 3) + n(x_0 - 3y_0 + z_0 + 1) = 0$, với mọi $m, n \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $(x_0; y_0 ; z_0)$ thoả mãn phương trình

$$m(2x + y - 3) + n(x - 3y + z + 1) = 0 \qquad (1)$$

Điểm $M(1; 0; -1)$ thoả mản phương trình (1) khi và chỉ khi

$$m(2.1 + 0 - 3) + n(1 - 3.0 - 1 + 1) = 0 \Rightarrow m = n.$$

Chọn $m = n = 1$, thay vào (1) ta có

$$(2x + y - 3) + (x - 3y + z + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 2 = 0 \qquad (2)$$

Điểm M và các điểm $N_0 \in (\alpha) \cap (\beta)$ cùng thoả mãn phương trình (3) nên (3) là phương trình mặt phẳng cần tìm.

***Kỹ thuật* 4. Viết phương trình mặt phẳng hợp với mặt phẳng cho trước một góc cho trước**

Thí dụ 11$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tạo một góc 60^0 với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + \sqrt{11}z + 3 = 0$

Lời giải

mặt phẳng (α) chứa trục Oz nên có phương trình $Ax + By = 0$, (1)
với $(A^2 + B^2 \neq 0)$.

Vectơ pháp tuyến của (α), (β) lần lượt là $\vec{a} = (A; B; 0)$, $\vec{b} = (2;-1;\sqrt{11})$.

Góc giữa (α), (β) bằng 60^0

$$\Leftrightarrow \cos60^0 = \frac{|2A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 0^2}.\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 11}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|2A - B|}{4\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\Leftrightarrow 4(A^2 + B^2) = (2A - B)^2 \Leftrightarrow 3B^2 + 4AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0, A \in \mathbb{R} \\ 4A + 3B = 0 \end{array}\right.$$

Chọn $\left[\begin{array}{l} (B = 0, A = 1) \\ (B = -4, A = 3) \end{array}\right.$ thay vào (1) cho ta hai mặt phẳng (α) cần tìm là

$(\alpha_1) : x = 0$ (mặt phẳng Oyz) ; $(\alpha_2) : 3x - 4y = 0$. ■

Thí dụ 12$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, biết rằng (α) tạo một góc 60^0 với mặt phẳng $(\beta) : y - z + 7 = 0$.

Lời giải

Xét mặt phẳng (α) qua A, B và cắt trục Oz tại $C(0; 0; c)$. Gọi $\vec{a}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α), $\vec{b} = (0; 1; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β)

- Nếu $c = 0$ thì $(\alpha) \equiv (Oxy)$. Khi đó $\vec{a} = (0; 0; 1) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Rightarrow (Oxy) \perp (\beta)$

$\Rightarrow$ (Oxy) không phải là mặt phẳng phải tìm. (1)

- Với $c \neq 0$, thì (α) có phương trình $\frac{x}{1} - \frac{y}{2} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow 2cx - cy + 2z - 2c = 0$

$\Rightarrow \vec{a} = (2c; -c; 2)$

Góc giữa (α), (β) bằng $60^0 \Leftrightarrow \cos 60^0 = \dfrac{|c+2|}{\sqrt{2}.\sqrt{5c^2+4}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|c+2|}{\sqrt{2}.\sqrt{5c^2+4}}$

$\Leftrightarrow 5c^2 + 4 = 2(c+2)^2 \Leftrightarrow 3c^2 - 8c - 4 = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3}$

Thay vào (2) và khử mẫu số, ta thu được hai mặt phẳng cần tìm là :

(α_1) : $(8 + 4\sqrt{7})x - (4 + 2\sqrt{7})y + 6z - (8 + 4\sqrt{7}) = 0$,

(α_2) : $(8 - 4\sqrt{7})x - (4 - 2\sqrt{7})y + 6z - (8 - 4\sqrt{7}) = 0$

Kỹ thuật 5. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

Thí dụ 13$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \dfrac{1}{2}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; -1; 2)$, bán kính $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Xét mặt phẳng (α) qua A, B và cắt trục Oz tại $C(0; 0; c)$.

Gọi d là cách từ I đến mặt phẳng (α).

- Nếu $c = 0$ thì $(\alpha) \equiv (Oxy)$. Khi đó $d = |z_I| = 2 > R$ nên (Oxy) không phải là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu. (1)

- Với $c \neq 0$, thì (α) có phương trình $\frac{x}{1} - \frac{y}{1} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow cx - cy + z - c = 0$ (2)

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) là $d = \dfrac{|c.1 - c(-1) + 2 - c|}{\sqrt{c^2 + (-c)^2 + 1^2}} = \dfrac{|c+2|}{\sqrt{2c^2+1}}$

- (α) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d = R \Leftrightarrow d^2 = R^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{(c+2)^2}{2c^2+1}$

$\Leftrightarrow 8c + 7 = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{7}{8}$. Thay vào (2) ta có $7x - 7y - 8z - 7 = 0$. (3)

Vậy có duy nhất một mặt phẳng được biểu diễn bởi (3) thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 14$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu

$$(S) : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9,$$

biết rằng (α) song song với mặt phẳng $(\beta) : 2x - 3y + \sqrt{3}z = 0$

Lời giải

- Mặt cầu (S) có tâm $I = (0; 1; 0)$, bán kính $R = 3$
- $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên mặt phẳng (α) có phương trình là : $2x - 3y + \sqrt{3}z + D = 0$ (1)
- (α) tiếp xúc (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến (α) bằng R.

Vậy nên $\dfrac{|D-3|}{\sqrt{4+9+3}} = \dfrac{|D-3|}{4} = 3 \;\Rightarrow\; |D-3| = 12 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} D = 15 \\ D = -9 \end{array}\right.$

Thay vào (1) có hai mặt phẳng cần tìm là

$$2x - 3y + \sqrt{3}z + 15 = 0, \qquad 2x - 3y + \sqrt{3}z - 9 = 0$$

***Kỹ thuật* 6. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng cho trước**

Thí dụ 15$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\beta) : x - 2y + 2z + 1 = 0, \quad (\gamma) : 4x - 3y + 7 = 0.$

2) $(\beta) : 5x - 7y + z + 3 = 0, \quad (\gamma) : 5x - 7y + z - 1 = 0.$

Lời giải

Gọi d_β, d_γ lần lượt là khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mp(β), mp(γ).

1) Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) khi và chỉ khi

$$d_\beta = d_\gamma \;\Leftrightarrow\; \frac{|x_0 - 2y_0 + 2z_0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|4x_0 - 3y_0 + 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{x_0 - 2y_0 + 2z_0 + 1}{3} = \pm\frac{4x_0 - 3y_0 + 7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x_0 - 2y_0 + 2z_0 + 1) = 3(4x_0 - 3y_0 + 7) \\ 5(x_0 - 2y_0 + 2z_0 + 1) = -3(4x_0 - 3y_0 + 7) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x_0 + y_0 - 10z_0 + 16 = 0 \\ 17x_0 - 19y_0 + 10z_0 + 26 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc các mặt phẳng có phương trình

$(\alpha) : 7x + y - 10z + 16 = 0, \quad (\alpha') : 17x - 19y + 10z + 26 = 0,$

Đó cũng chính là các mặt phẳng mà ta phải tìm.

2) Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) khi và chỉ khi

$$d_\beta = d_\gamma \;\Leftrightarrow\; \frac{|5x_0 - 7y_0 + z_0 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-7)^2 + 1^2}} = \frac{|5x_0 - 7y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{5^2 + (-7)^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x_0 - 7y_0 + z_0 + 3 = 5x_0 - 7y_0 + z_0 - 1 \\ 5x_0 - 7y_0 + z_0 + 3 = -(5x_0 - 7y_0 + z_0 - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 = -1 \text{ (sai)} \\ 5x_0 - 7y_0 + z_0 + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc mặt phẳng (α) có phương trình : $5x - 7y + z + 2 = 0$.

Đó cũng là mặt phẳng duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Lời bình

- Khi (β) cắt (γ) (xem câu 1), có hai mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng ấy. Người ta nói đó là các mặt phẳng phân giác của hai mặt phẳng cắt nhau. Chú ý rằng hai mặt phẳng phân giác luôn vuông góc với nhau. Bạn nhớ điều này để kiểm tra lại kết quả của lời giải.
- Khi (β) // (γ) (xem câu 2), có duy nhất một mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng ấy. Mặt phẳng tìm được song song với hai mặt phẳng (β) và (γ).

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

***Kỹ thuật* 7. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**

Khoảng cách từ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M_0;(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Thí dụ 16$^{(P)}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

1) $M(2; -1; 3)$, $(\alpha) : 2x - y + 2z + 18 = 0$.

2) $M(2; -3; 7)$, $(\alpha) : 3x - 4y - 2 = 0$.

Lời giải

1) Khoảng cách từ $M(2; -1; 3)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z + 5 = 0$ là

$$. \mathrm{d} = \frac{|2.2 - 1.1 + 2.3 + 18|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{27}{3} = 9 \ \blacksquare$$

2) Khoảng cách từ $M(3; -4; 5)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 4y - 2 = 0$.là

$$\mathrm{d} = \frac{|3.2 - 4.7 + 0.5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{20}{5} = 4 \,. \blacksquare$$

***Kỹ thuật* 8. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song**

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên một trong hai mặt phẳng ấy đến mặt phẳng còn lại.

Thí dụ 17$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau :

1) $(\alpha) : x + 3y - \sqrt{6}z + 7 = 0$, $\qquad (\beta) : x + 3y - \sqrt{6}z - 5 = 0$.

2) $(\alpha) : 9x - 6y + 30z - 5 = 0$, $\qquad (\beta) : 3x - 2y + 10z + \dfrac{55}{3} = 0$.

Lời giải

1) ➢ *Cách* 1 : Dễ thấy điểm $A(-1; -2; 0)$ thuộc mp(α). Bởi $(\alpha) \,//\, (\beta)$ nên

$$\mathrm{d}((\alpha), (\beta)) = \mathrm{d}(A, (\beta)) = \frac{|-1 + 3(-2) - \sqrt{6}.0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 6}\,.} = \frac{12}{4} = 3 \ \blacksquare$$

➢*Cách* 2 : • Lấy một điểm bất kì $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mp(α), thế thì

$$x_0 + 3y_0 - \sqrt{6}z_0 + 7 = 0.$$

• Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) là

$$\mathrm{d} = \frac{|x_0 + 3y_0 - \sqrt{6}z_0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 6}} = \frac{|\overbrace{(x_0 + 3y_0 - \sqrt{6}z_0 + 7)}^{=0} - 12|}{\sqrt{16}} = \frac{|0 - 12|}{4} = 3$$

• Do $(\alpha) \,//\, (\beta)$ nên d = 3 cũng là khoảng cách hai mặt phẳng ấy.

2) Lấy một điểm bất kì $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (α). Ta có

• $9x_0 - 6y_0 + 30z_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 - 2y_0 + 10z_0 - \dfrac{5}{3} = 0 \qquad (*)$

• Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) là

$$\mathrm{d} = \frac{\left|3x_0 - 2y_0 + 10z_0 + \frac{55}{3}\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 10^2}} = \frac{|\overbrace{(3x_0 - 2y_0 + 10z_0 - \frac{5}{3})}^{=0} + 20|}{\sqrt{121}} = \frac{20}{11}$$

• Do $(\alpha) \,//\, (\beta)$ nên $\mathrm{d} = \dfrac{20}{11}$ cũng là khoảng cách hai mặt phẳng ấy. ■

Lời bình

1) Cho hai mp song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, $(\beta): Ax + By + Cz + D' = 0$

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm thuộc (α), tức là $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (1)

Khi đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (β) là

$$d(M_0;(\beta)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\overbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}^{=0} + D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Đối chiếu với (1) ta có $$d(M_0;(\beta)) = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Do $(\alpha) // (\beta)$ nên $$d((\alpha);(\beta)) = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Đó là công thức tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song *có cùng vectơ pháp tuyến*. Với công thức này, bạn *không phải bận tâm* đến toạ độ cụ thể của một điểm nào cả.

2) Nếu *may mắn* biết được một điểm đặc biệt thuộc một mặt phẳng thì lời giải được trình bày gọn gàng như cách 1 (câu 1).

3) Khi hai mặt phẳng song song mà các vectơ pháp tuyến của chúng khác nhau, ta biến đổi các phương trình (bằng cách nhân hoặc chia với một hằng số thích hợp) để cho chúng bằng nhau. Tuy nhiên, để lời giải ngắn gọn, bạn có thể trình bày như dòng (*) của câu 2 trong Thí dụ trên.

Bài toán 3. Tính góc giữa hai mặt phẳng

Kỹ thuật 9. Tính góc giữa hai mặt phẳng

Nếu $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α), (α') thì số đo góc φ giữa hai mặt phẳng ấy được tính theo công thức

$$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Thí dụ 18$^{(P)}$. Tìm số đo góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\alpha): x + \sqrt{3}y + 1 = 0$, $(\beta): y + 1 = 0$.

2) $(\alpha): 2x + y + z + 3 = 0$, $(\beta): 2x - 2y + z + 7 = 0$.

Lời giải

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha): x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ là $\vec{n} = (1; \sqrt{3}; 0)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta): y + 1 = 0$ là $\vec{n}' = (0; 1; 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó :

$$\cos\varphi = \frac{|1.0 + \sqrt{3}.1 + 0.0|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{0+1+0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho là $\frac{\pi}{3}$. ■

2) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z + 3 = 0$ là $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta): 2x - 2y + z + 7 = 0$ là $\vec{n}' = (2; -2; 1)$. Gọi φ là góc giữa (α), (β) ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|2.2+1.(-2)+1.1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Vậy góc giữa hai hai mặt phẳng (α) và (β) bằng $\frac{\pi}{3}$. ■

Thí dụ 19$^{(P)}$. Tìm số đo góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) (α): $8x - 4y - 8z + 1 = 0$, (β) : $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$.

2) (α): $5x - 2y + 3z + 13 = 0$, (β) : $2x - 3y - 4z + 5 = 0$.

Lời giải

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $8x - 4y - 8z + 1 = 0$ là $\vec{n} = (2; -1; -2)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$ là $\vec{n'} = (\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 0)$. Gọi φ là góc giữa (α), (β) ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|2\sqrt{2} - 1.(-\sqrt{2}) - 2.0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2^2)}\sqrt{2+2+0}} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Vậy góc giữa hai hai mặt phẳng (α) và (β) bằng $\frac{\pi}{4}$. ■

2) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $5x - 2y + 3z + 13 = 0$ là $\vec{n} = (5; -2; 3)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $2x - y - 4z + 5 = 0$ là $\vec{n'} = (2; -1; -4)$.

Để ý $\vec{n}.\vec{n'} = 5.2 - 2(-1) + 3(-4) = 0$. Vậy nên góc giữa hai hai mặt phẳng (α) và (β) bằng $\frac{\pi}{2}$. ■

Bài toán 4. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Kỹ thuật 10. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Thí dụ 20$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) (α): $x - 3y - 7z + 1 = 0$, (β) : $2x + 5y + 4z + 3 = 0$.

2) (α): $5x - 2y + 3z + 13 = 0$, (β) : $2x - 3y - 4z + 5 = 0$.

Lời giải

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $x - 3y - 7z + 1 = 0$ là $\vec{n} = (1; -3; -7)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $2x + 5y + 4z + 3 = 0$ là $\vec{n'} = (2; 5; 4)$.

Thấy rằng $\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{5}$ suy ra (α) cắt (β). ■

2) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $5x - 2y + 3z + 13 = 0$ là $\vec{n} = (5; -2; 3)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $2x - y - 4z + 5 = 0$ là $\vec{n'} = (2; -1; -4)$.

Thấy rằng $\vec{n}.\vec{n'} = 5.2 - 2(-1) + 3(-4) = 0 \Leftrightarrow (\alpha) \perp (\beta)$. ■

Thí dụ 21$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\alpha): \dfrac{x}{1} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, $\quad(\beta): 3x - \dfrac{3}{2}y + z - 3 = 0.$

2) $(\alpha): \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{9} + \dfrac{z}{45} = 1$, $\quad(\beta): \dfrac{x}{30} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{75} = 1.$

Lời giải

1) • *Cách trình bày thứ nhất* :

Biến đổi $\dfrac{x}{1} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x - 3y + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x - \dfrac{3}{2}y + z - 3 = 0.$

Suy ra $(\alpha) \equiv (\beta)$ ■

• *Cách trình bày thứ hai* :

Viết lại $\dfrac{x}{1} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} - 1 = 0.$

Ta có $\dfrac{1}{1} : \dfrac{-1}{2} : \dfrac{1}{3} : -1 = 3 : \dfrac{-3}{2} : z : -3 \ (= \dfrac{1}{3})$. Suy ra $(\alpha) \equiv (\beta)$. ■

2) Ta có $\dfrac{1}{2} : \dfrac{-1}{9} : \dfrac{1}{45} \neq \dfrac{1}{30} : \dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{75}$ suy ra (α) cắt (β) . ■

Thí dụ 22$^{(P)}$. Cho ABC là tam giác. Kí hiệu các cạnh là a, b, c. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi một trường hợp sau :

1) $(\alpha): x\ln\dfrac{a}{b} + y\ln\dfrac{b}{c} + z\ln\dfrac{c}{a} + 1 = 0$, $\quad(\beta): x + y + z + 1 = 0.$

2) $(\alpha): x\sin A + y\sin B + z\sin C - 1 = 0$, $\quad(\beta): ax + by + cz + 1 = 0.$

Lời giải

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (\ln\dfrac{a}{b}; \ln\dfrac{b}{c}; \ln\dfrac{c}{a})$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\vec{n'} = (1; 1; 1)$.

Để ý $\vec{n}.\vec{n'} = \ln\dfrac{a}{b} + \ln\dfrac{b}{c} + \ln\dfrac{c}{a} = \ln(\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{a}) = \ln 1 = 0$. Suy ra $(\alpha) \perp (\beta)$ ■

2) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (\sin A; \sin B; \sin C)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\vec{n'} = (a; b; c)$

• Để ý $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} (= 2R) \neq \dfrac{-1}{1}$. Suy ra $(\alpha) \,//\, (\beta)$ ■

Bài toán 5. Xác định điểm rơi

Cho điểm M, hình $(\mathcal{H})$ và vectơ $\vec{r} \neq \vec{0}$.

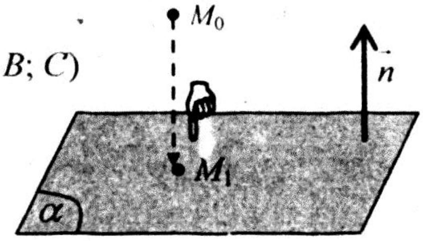
• Điểm M' thuộc hình $(\mathcal{H})$ được gọi là ***điểm rơi*** của M trên mp(α) theo phương $\vec{r}$ nếu $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương với $\vec{r}$.

Hai điểm rơi đặc biệt được quan tâm là :

+ *Hình chiếu vuông góc* của một điểm trên một mặt phẳng.
(Phương rơi là vectơ pháp tuyến của chính mặt phẳng ấy)

+ *Giao điểm* của đường thẳng với mặt phẳng.
(Phương rơi là vectơ chỉ phương của chính đường thẳng ấy.

***Kỹ thuật* 11. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$**



Hình 58

- (h.58) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (A; B; C)$
- Điểm $M_1(x_1; y_1; y_1)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} M_1 \in (\alpha) \\ MM_1 \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ \overrightarrow{M_0M_1} = t.\vec{n} \end{cases} . \quad (*)$$

- Khử t, hệ (*) cho ta để có toạ độ điểm M_1 cần tìm.

➤ Khi các thành phần toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ đều khác 0, bài toán *không bỏ lỡ cơ hội* tận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để làm "*đẹp*" lời giải.

Thí dụ 23$^{(P)}$
Xác định hình chiếu vuông góc của điểm $M_0 = (3; 6; 2)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 5x - 2y + z + 25 = 0$.

Lời giải

➤ *Cách trình bày thứ nhất* :

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (5; -2; 1)$

Lấy $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $5x_1 - 2y_1 + z_1 + 25 = 0$. (1)

Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - 3; y_1 - 6; z_1 - 2)$

- M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0M_1 \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_1 - 3}{5} = \frac{y_1 - 6}{-2} = \frac{z_1 - 2}{1}$$

$$= \frac{5(x_1 - 3) - 2(y_1 - 6) + (z_1 - 2)}{5.5 - 2.(-2) + 1} = \frac{\overbrace{(5x_1 - 2y_1 + z_1 + 25)}^{=0} - 30}{30} \overset{(1)}{=} -1 \text{ (Do có (1))}$$

$\Rightarrow \{x_1 = -2; y_1 = 8; z_1 = 1\}$. Vậy $M_1 = (-2; 8; 1)$ là điểm phải tìm.

➤ *Cách trình bày thứ hai* : (Tiếp nối từ (1))

Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - 3; y_1 - 6; z_1 - 2)$

- M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0M_1 \perp (\alpha)$ (2)

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3 = 5t \\ y_1 - 6 = -2t \\ z - 2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 5t \\ y_1 = 6 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (3)$$

Thế (3) vào (1) có $5(3 + 5t) - 2(6 - 2t) + (2 + t) + 25 = 0 \Leftrightarrow 30t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Thay $t = -1$ vào (3) có $M_1 = (-2; 8; 1)$.

Đó là hình chiếu vuông góc của điểm $M_0 = (3; 6; 2)$ trên mặt phẳng (α).

Lời bình: Trong cách trình bày thứ nhất ta sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Nếu có $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ thì $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3}{m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3}$ với $m_1, m_1, m_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Thí dụ 24$^{(P)}$. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $M_0 = (2; -1; 3)$, $(\alpha) : 3x + y - 4z - 23 = 0$.

2) $M_0 = (1; -2; 3)$, $(\alpha) : x + y + z - 1 = 0$.

Lời giải

1) ➢ *Cách trình bày thứ nhất* :

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (3; 1; -4)$

Lấy $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $3x_1 + y_1 - 4z_1 - 23 = 0$. (1)

- M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0M_1 \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_1 - 2}{3} = \frac{y_1 + 1}{1} = \frac{z_1 - 2}{-4}$$

$$= \frac{3(x_1 - 2) + (y_1 + 1) - 4(z_1 - 2)}{9 + 1 + 16} = \frac{\overbrace{(3x_1 + y_1 - 4z_1 - 23)}^{=0} + 26}{9 + 1 + 16} = 1 \text{ (Do có (1))}$$

$\Rightarrow \{x_1 = 5; y_1 = 0; z_1 = -2\}$. Vậy $M_1 = (5; 0; -2)$ là điểm phải tìm.

➢ *Cách trình bày thứ hai* :

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (3; 1; -4)$

Lấy $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $3x_1 + y_1 - 4z_1 - 23 = 0$. (2)

Điểm M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0M_1 \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 3t \\ y_1 = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 4t \end{cases} \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) có $3(3t + 2) + (t - 1) - 4(-4t + 2) - 23 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Thay $t = 1$ vào (3) có $M_1 = (5; 0; -2)$.

Đó là hình chiếu vuông góc của điểm $M_0 = (2; -1; 3)$ trên mặt phẳng (α).

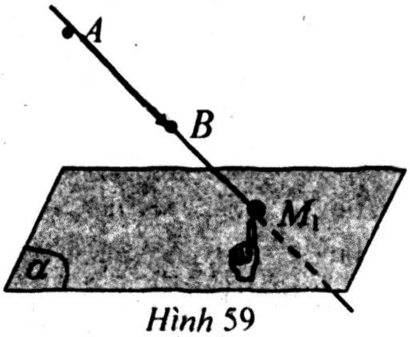
2) Thấy rằng toạ độ điểm $M_0 = (1; -2; 3)$ thoả mãn phương trình của mặt phẳng (α), chứng tỏ điểm $M_0 \in (\alpha)$. Do vậy hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mặt phẳng (α) là chính nó.

Kỹ thuật 12. Xác định giao điểm của đường thẳng *AB* với mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$

- (h.59) Điểm $I(x_1; y_1; y_1)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) khi và chỉ khi $I \in (\alpha)$ và A, B, M_1 thẳng hàng. Nghĩa là

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ \overrightarrow{AI} = t.\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ x = x_1 + At \\ y = y_1 + Bt \\ z = z_1 + Ct \end{cases} \qquad (*)$$



Hình 59

- Khử t, hệ (*) cho ta để có toạ độ điểm I cần tìm.

➢ Khi các thành phần toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ đều khác 0, bài toán *không bỏ lỡ cơ hội* tận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để làm "*đẹp*" lời giải.

Thí dụ 25$^{(P)}$. Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau đây:

1) $A(2; 1; 0)$, $B(4; 2; -3)$, $(\alpha) : 3x - y + 5z - 15 = 0$.
2) $A(1; -2; -3)$, $B(2; 1; 1)$, $(\alpha) : x + 5y - 2z - 5 = 0$
3) $A(1; -1; 1)$, $B(5; 2; 2)$, $(\alpha) : 2x - 3y + z + 5 = 0$.

Lời giải

- Điểm I là giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) thì $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ (*)

1) Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $3x_1 - y_1 + 5z_1 - 15 = 0$. (1)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -3)$, $\overrightarrow{AI} = (x_1 - 2 ; y_1 + -1 ; z_1)$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x_1 - 2}{2} = \frac{y_1 - 1}{1} = \frac{z_1}{-3} = \frac{3(x_1 - 2) - (y_1 - 1) + 5z_1}{3.2 - 1 + 5.(-3)}$$

$$= \frac{\overbrace{(3x_1 - y_1 + 5z_1 - 15)}^{=0} + 10}{-10} = -1 \text{ (Do có (1))} \Rightarrow \{x_1 = 0; y_1 = 0; z_1 = 3)$$

Vậy $I = (0; 0; 3)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α). ■

2) Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $x_1 + 5y_1 - 2z_1 - 5 = 0$. (2)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 4)$. $\overrightarrow{AI} = (x_1 - 1 ; y_1 + 2; z_1 + 3)$. Khi đó :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{y_1 + 2}{3} = \frac{z_1 + 3}{4} = \frac{(x_1 - 1) + 5(y_1 + 2) - 2(z_1 + 3)}{1 + 5.3 - 2.4}$$

$$= \frac{\overbrace{(x_1 + 5y_1 - 2z_1 - 5)}^{=0} + 8}{8} = 1 \text{ (Do có (2))} \Rightarrow \{x_1 = 2; y_1 = 1; z_1 = 1)$$

Vậy $I = (2; 1; 1)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α).

3) • Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (2; -3; 1)$, • $\overrightarrow{AB} = (4; 3; 1)$,

• $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2.4 - 3.3 + 1.1 = 0$. Dễ thấy điểm $A \notin (\alpha)$

Từ các điều ấy suy ra $AB \parallel (\alpha)$ nên giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) không tồn tại.

Lời bình

➢ Tuy biết được giao điểm của đường thẳng AB, một câu hỏi mới đặt ra là điểm I có thuộc đoạn thẳng AB hay không ? Nói khác đi đoạn thẳng AB có cắt mặt phẳng (α) đã cho hay không. Thật đơn giản :

- Đoạn thẳng AB cắt mp(α) khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}$ trái hướng với $\overrightarrow{IB}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} < 0$.

Trong Thí dụ trên

+ *Ở câu* 1: Ta có $\overrightarrow{IA} = (2; 3; -3)$, $\overrightarrow{IB} = (4; 4; 6)$ suy ra $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 2 > 0$

$\Rightarrow$ đoạn thẳng AB không cắt mặt phẳng (α).

+ *Ở câu* 2 : Ta có $\overrightarrow{IA} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{IB} = (-1; -3; -4)$ suy ra $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -2 < 0$

$\Rightarrow$ đoạn thẳng AB cắt mặt phẳng (α).

➢ Nếu bài toán chỉ yêu cầu trả lời đoạn thẳng AB có cắt mặt phẳng (α) hay không thì có nhất thiết phải tìm giao điểm I hay không ?

Có cách nào đơn giản hơn để biết đoạn thẳng AB cắt mặt phẳng (α) ?

Câu trả lời đang bỏ ngỏ ấy có trong **Bài tập 5.28.**

Lời nhắn: Lời giải bài toán tổng quát của điểm rơi của một điểm trên một mặt phẳng được trình bày trong **Bài tập 5. 29.**

Kỹ thuật 13. Tìm điểm đối xứng của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ qua mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mặt phẳng (α). Khi đó M' là điểm đối xứng của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ qua mặt phẳng (α) khi và chỉ khi I là trung điểm của MM'.

Do vậy kỹ thuật tìm điểm đối xứng của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ qua mặt phẳng (α) tiến hành theo trình tự hai bước như sau :

Bước 1 : Tìm hình chiếu của vuông góc I của điểm M_0 trên mặt phẳng (α). (*Kỹ thuật* 10)

Bước 2 : Xác định điểm M' sao cho I là trung điểm MM'.

Thí dụ 26$^{(P)}$. Tìm điểm đối xứng với điểm M_0 qua mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

1) $M_0 = (1; -1; 2)$, $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

2) $M_0 = (0; -1; 3)$, $(\alpha): 3x - 4z + 5 = 0$.

Lời giải

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (2; -2; 1)$

Gọi $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc(α), tức là $2x_1 - 2y_1 + z_1 + 3 = 0$. (1)

- Điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0I \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0I} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_1-1}{2} = \frac{y_1+1}{-2} = \frac{z_1-2}{1}$$

$$= \frac{2(x_1-1) - 2(y_1+1) + (z_1-2)}{4+4+1} = \frac{\overbrace{(2x_1 - 2y_1 + z_1 + 3)}^{=0} - 9}{9} = -1 \text{ (Do có (1))}$$

$\Rightarrow \{x_1 = -1; y_1 = 1;\ z_1 = 1\} \Rightarrow I = (-1; 1; 1)$

- Điểm $M_1(x'; y'; z')$ đối xứng với điểm M_0 qua mặt phẳng $(\alpha) \Leftrightarrow I$ là trung điểm

của MM', tức là $\begin{cases} x' + x_0 = 2x_I \\ y' + y_0 = 2y_I \\ z' + z_0 = 2x_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = 2.(-1) \\ y' - 1 = 2.1 \\ z' + 2 = 2.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 3 \\ z' = -1 \end{cases}$

Vậy $M' = (-3; 3; -1)$ là điểm phải tìm.

2) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (3; 0; 4)$

Gọi $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc(α), tức là $3x_1 + 4z_1 - 4 = 0$. (2)

Điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0I \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0I} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7 + 3t \\ y_1 = -1 \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) có $3.(3t - 7) + 4.4t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Thay $t = 1$ vào (4) có $I = (-4; -1; 4)$.

Điểm $M_1(x'; y'; z')$ đối xứng với điểm M_0 qua mặt phẳng (α) khi và chỉ khi I là trung điểm của MM', tức là

$$\begin{cases} x' + x_0 = 2x_I \\ y' + y_0 = 2y_I \\ z' + z_0 = zx_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 7 = 2.(-4) \\ y' + 1 = 2.(-1) \\ z' + 0 = z.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -3 \\ z' = 4 \end{cases}$$

Vậy $M' = (-1; -3; 4)$ là điểm phải tìm.

BÀI TẬP 5

5.1$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

1) (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, trong đó $A(-1; 0; 6)$, $B(1; -4; 0)$

2) Đi qua điểm $M_0(8; 4; 3)$, và vuông góc với trục Oz.

5.2$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau đây

1) đi qua điểm $M_0(7; 1; 0)$ và song song với mặt phẳng (β) : $4x - 2y - z + 3 = 0$

2) đi qua điểm $A(1; -1; 2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$(\beta) : x + y - 3z - 1 = 0$ và $(\gamma) : x - 2y - 3 = 0$

3) đi qua hai điểm $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng

$(\beta) : x - 2y + 3z + 7 = 0$

5.3. Cho bốn điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; 5; 3)$, $C(9; -1; 5)$, $D(5; 3; -3)$.

1) Tính thể tích tứ diện $ABCD$

2) Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm của tứ diện ấy.

Viết phương trình của một mặt phẳng trong số ấy.

5.4$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) trong mỗi trường hợp sau

1) $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; 3; 4)$.

2) $A(3; -1; -1)$, $B(1; 1; 1)$, $C(8; 3; 4)$.

3) $A(22; 0; 0)$, $B(0; 7; 0)$, $C(0; 0; 87)$.

5.5. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(3; 4; 5)$, cắt các trục toạ độ tại ba điểm cách đều gốc toạ độ.

5.6$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(\frac{4}{3}; \frac{11}{3}; \frac{64}{3})$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

5.7. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(0; 1; 2)$ và giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 2y - 5 = 0$, $(\beta) : x + 4y - 2z - 3 = 0$.

5.8$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$, biết rằng (α) tạo một góc 60^0 với mặt phẳng (Oxz)

5.9$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tạo một góc 60^0 với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + 2z + 3 = 0$

5.10$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu

$$(S) : (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4},$$

biết rằng (α) song song với mặt phẳng $(\beta) : 5x - \sqrt{11}y - 8z + 1 = 0$

5.11$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{3}$

5.12$^{(P)}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\beta) : x - 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 5 = 0y + 3z + 4 = 0$, $(\gamma) : 3x - y + 2z - 1 = 0$.

2) $(\beta) : 6y - 8z + 1 = 0$, $(\gamma) : 2x - 9y + 6z - 3 = 0$.

3) $(\beta) : x + 2y - 2z + 3 = 0$, $(\gamma) : x + 2y - 2z - 1 = 0$.

5.13$^{(P)}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

1) $M(1; 0; 1)$, $(\alpha) : x - \sqrt{6}y + 3z + 8 = 0$.

2) $M(2; -3; 0)$, $(\alpha) : 2x - 3y + \sqrt{3}z - 3 = 0$.

5.14$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau :

1) $(\alpha): 2x + \sqrt{7}y - 5z + 1 = 0$, $\quad(\beta): 2x + \sqrt{7}y - 5z - 5 = 0$.

2) $(\alpha): 3x - 5y + \sqrt{15}z = 0$, $\quad(\beta): 3x - 5y + \sqrt{15}z - 21 = 0$.

5.15$^{(P)}$. Tìm số đo góc giữa hai mặt phẳng

1) $(\alpha): y + \sqrt{3}z + 5 = 0$, $\quad(\beta): z - 3 = 0$.

2) $(\alpha): 2x - y - 2z + 1 = 0$, $\quad(\beta): \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 5 = 0$.

3) $(\alpha): \sqrt{3}x + y + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$, $\quad(\beta): x + \sqrt{3}y + 2 = 0$

5.16$^{(P)}$. Tìm số đo góc giữa hai mặt phẳng

1) (α) : , $\quad(\beta): x + 9 = 0$.

2) $(\alpha): \sqrt{3}x + y + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$, $\quad(\beta): \sqrt{2}x + \sqrt{6}y + 2 = 0$

5.17$^{P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\alpha): x + 2y - 3z = 0$, $\quad(\beta): x + 2y + 3z = 0$.

2) $(\alpha): 3x + y - 3 = 0$, $\quad(\beta): x + 3y + 3z = 0$.

3) $(\alpha): \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{4}{5}z + 1 = 0$, $\quad(\beta): \dfrac{3}{2}x + \dfrac{4}{3}y + \dfrac{5}{4}z + 1 = 0$

5.18$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\alpha): 7x + 3y - 10z = 0$ $\quad(\beta): x + 3y + 5z - 9 = 0$.

2) $(\alpha): \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, $\quad(\beta): \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$.

3) $(\alpha): x\log_2 3 - y\log_5 3 + z\log_{11} 3 + 3 = 0$,

$(\beta): x\log_2 7 - y\log_5 7 + z\log_{11} 7 + 7 = 0$.

5.19$^{(P)}$. Cho tam giácABC. Kí hiệu các cạnh là a, b, c. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi một trường hợp sau :

1) $(\alpha): x\cos A + y\cos B + z\sin C + 3 = 0$,

$(\beta): x + y\cos C - z\sin B + 7 = 0$.

2) $(\alpha): x\sin\dfrac{A}{2} + y\sin\dfrac{B}{2} + z\sin\dfrac{C}{2} + 1 = 0$,

$$(\beta): \frac{ax}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{bx}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{cx}{\cos\frac{C}{2}} - 4 = 0.$$

5.20$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng có phương trình :

$(\alpha): (m + 3)x - y + (4m + 5)z - 10 = 0$

$(\beta): 2x - my + 3z + m = 0$,

Với giá trị nào của m thì $(\alpha) \mathbin{//} (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$, (α) cắt (β), $(\alpha) \perp (\beta)$

5.21$^{(P)}$. Cho ABC là tam giác không vuông. Xác định vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $(\alpha): x\cos A + y\cos B + z\cos C + 7 = 0$,

$(\beta): x\tan A - y\sin C - z\sin B + 3 = 0$.

2) $(\alpha): x\tan A - y\cot A + z\cot 2A + 3 = 0$,

$(\beta): x - y + 2z + 7 = 0$.

5.22$^{(P)}$. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau đây :

1) $M_0 = (1; 2; -3)$, $(\alpha) : 3x + 2y - 2z + 5 = 0$.

2) $M_0 = (-2; 0; -1)$, $(\alpha) : x + 2y + 3z - 9 = 0$.

5. 23$^{(P)}$. Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) trong mỗi trường hợp sau :

1) $A(5; -1; 3)$, $B(7; 0; 4)$, $(\alpha) : 4x - 3y + z + 4 = 0$.

2) $A(-3; 2; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $(\alpha) : 2x + 5y + 7z - 1 = 0$.

5. 24$^{(P)}$. Cho ba điểm $A(-1; 1; 0)$, $B(1; 2; -1)$, $M_0(0; 2; 1)$.

1) Tìm hình chiếu của điểm M_0 trên đường thẳng AB.

2) Tìm toạ độ điểm đối xứng với điểm M_0 qua đường thẳng AB.

5.25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h. Gọi I là trung điểm SC. Tính khoảng từ I đến mặt phẳng (ABI)

5.26. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của $A'D'$ và $B'B$.

1) Tính góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$..

2) Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, DD'. Chứng minh rằng AC' vuông góc với mặt phẳng (MNP)

3) Tính thể tích tứ diện $AMNP$.

5.27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, DD', $B'C'$. Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng $A'M$ và NP .

5. 28. Cho hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_1; y_1; z_1)$ không nằm trên mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm điều kiện cần và đủ để :

1) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α).

2) Đoạn thẳng AB cắt mặt phẳng (α).

3) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) tại I sao có A nằm giữa I và B

4) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) tại I sao có B nằm giữa I và A

5. 29. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$, vectơ $\vec{r} = (a; b; c)$. Xác định điểm rơi của M trên (α) theo vectơ $\vec{r} \neq \vec{0}$.

5. 30$^{(P)}$. Cho hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(1; -1; 2)$. Tìm điểm M thuộc và mặt phẳng (α) : $2x - 2y + z = 0$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Bài tập trắc nghiệm

55.1$^{(P)}$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua một đỉnh của tứ diện và cách đều ba đỉnh còn lại của tứ diện ấy?

A. 4; B. 8; C. 12; D. 16.

55.2$^{(P)}$. Mặt phẳng nào có phương trình dưới đây là mặt phẳng chứa trục Oy :

A. $x + y + z + 1 = 0$; B. $x + 2y + 1 = 0$;

C. $2x + 3z = 0$; D. $y = 0$.

55.3$^{(P)}$. Mặt phẳng nào có phương trình dưới đây là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (Oyz) :

A. $3x + y = 0$; B. $x + 2y + 3z + 1 = 0$;

C. $3y + 4z + 5 = 0$; D. $x + 1 = 0$.

55.4$^{(P)}$. Mặt phẳng nào có phương trình dưới đây có vectơ pháp tuyến vuông góc vectơ $\vec{u} = (1; 1; -3)$:

A. $x + y - 2z + 3 = 0$; B. $2x + y + z = 0$

C. $x + y + 2z + 3 = 0$; D. $x + 2y + z + 2 = 0$.

55.5$^{(P)}$. Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(\frac{1}{2}; 0; 0)$, $B(0; \frac{2}{3}; 0)$, $C(;0; 0; \frac{3}{4})$, có phương trình là :

A. $\frac{2}{1}x+\frac{3}{2}y+\frac{4}{3}z=1$;　　　　B. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z=1$;
C. $2x + 3y + 4z - 1 = 0$;　　　　D. $2x + 3y + 4z = 0$

55.6$^{(P)}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(2; 1; 0)$ và song song với mặt phẳng (α) : $2x + 3y - 5z + 13 = 0$ là :

A. $2x + 3y - 5z = 0$;　　　　B. $2x + 3y - 5z - 7 = 0$;
C. $x + y + 5z - 7 = 0$;　　　　D. $2x + y - 5z + 7 = 0$.

55.7$^{(P)}$. Cho hai điểm $A(0; -1; 1)$, $B(2; 1; 3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là :

A. $x + y + z = 0$;　　　　B. $x + y + z + 3 = 0$.
C. $x + 2y + 2z = 0$;　　　　D. $x + y + z - 3 = 0$;

55.8$^{(P)}$. Cho ba điểm $A(0; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(2; 3; 5)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC là :

A. $y + z - 1 = 0$;　　　　B. $y - z + 1 = 0$;
C. $x - y + z - 1 = 0$;　　　　D. $x + y - z + 1 = 0$.

55.9$^{(P)}$. Mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0; -1; 1)$, $B(1; 1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là :

A. $(2; 1; 5)$;　　B. $(1; 1; 2)$;　　C. $(1; 2; -5)$;　　D. $(-5; 1; 2)$

55.10$^{(P)}$. Cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; 0)$. Giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 5y + 7z - 26 = 0$ là điểm có toạ độ :

A. $(2; 2; 2)$;　　B. $(1; 2; 2)$;　　C. $(2; 1; 2)$;　　D. $(2; 2; 1)$.

55.11$^{(P)}$. Cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; 1; 1)$. Giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(\alpha) : x + 5y - 4z - 13 = 0$ là điểm có toạ độ :

A. $(4; 1; -3)$;　　B. $(-3; 4; 1)$;　　C. $(-3; 1; 4)$;　　D. $(3; 1; 4)$.

55.12$^{(P)}$. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(-1; 2; 1)$ trên mặt phẳng
$(\alpha) : x + 3y - 2z + 31 = 0$ là điểm có toạ độ :

A. $(-3; 0; 5)$;　　B. $(1; 2; 2)$;　　C. $(-2; -1; -1)$;　　D. $(2; 1; 1)$.

55.13$^{(P)}$. Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y - 2z + 1 = 0$, $(\beta) : 3x - y + z = 0$ thì $\cos\varphi$ có giá trị là :

A. $\frac{5}{\sqrt{11}}$;　　B. $\frac{5\sqrt{11}}{33}$;　　C. $\frac{5}{33}$;　　D. $\frac{5\sqrt{11}}{6}$.

55.14$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 2y + z + 1 = 0$, $(\beta) : y + z + 13 = 0$. Số đo góc giữa chúng là là :

A. 90^0 ;　　B. 60^0 ;　　C. 45^0 ;　　D. 30^0 .

55.15$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z + 3 = 0$, $(\beta) : x + y - 2z + 13 = 0$ Số đo góc giữa chúng là :

A. 90^0 ;　　B. 60^0 ;　　C. 45^0 ;　　D. 30^0 .

55.16$^{(P)}$. Số đo góc giữa mặt phẳng $(\alpha) : x + \sqrt{3}z + 7 = 0$ và mặt phẳng mp(Oxy) là :

A. 90^0 ;　　B. 60^0 ;　　C. 45^0 ;　　D. 30^0 .

55.17. Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : x + my - (m + 1)z = 0$, (β) $x - 2y + z = 0$. Nếu góc giữa chúng bằng 30^0 thì giá trị của m là :

A. -1 ;　　B. 1 hoặc $-\frac{1}{2}$;　　C. -1 hoặc $\frac{1}{2}$;　　D. $\frac{1}{2}$.

55.18. Cho hai mặt phẳng có phương trình :

$(\alpha) : (5m+1)x + 2y + (m+3)z - 10 = 0,\ (\beta) : 3x + my + 2z - 6 - m = 0.$

Nếu chúng song song với nhau thì giá trị của m là :

A. 3 ; B. 2 ; C. 1 ; D. -1 .

55.19$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng :

$(\alpha) : x + 2y - 3z + \sin a\cos a = 0,\ (\beta) : 2x + 4y - 6z + \sin 2a = 0.$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

A. $(\alpha) // (\beta)$; B. (α) cắt (β); C. $(\alpha) \equiv (\beta)$; D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

55.20$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng :

$(\alpha) : x + (m^2+2)y + 3z + 1 = 0,\ (\beta) : x + 2my + 3z + 1 = 0$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

A. $(\alpha) // (\beta)$; B. (α) cắt (β); C. $(\alpha) \equiv (\beta)$; D. $(\alpha) \perp (\beta)$.

55.21$^{(P)}$. Khoảng cách từ điểm $M(1; 4; 0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : 5x - 8y + \sqrt{11}z + 7 = 0$ là

A. 10; B. 20; C. 3; D. 2 .

55.22$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng song song :

$(\alpha) : \sqrt{17}x + 2y - 10z - 20 = 0,\ (\beta) : \sqrt{17}x + 2y - 10z + 13 = 0$

Khoảng cách giữa chúng là

A. 23 ; B. 7; C. 3; D. 2 .

55.23$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng song song

$(\alpha) : x + 2y - 3z - 1 = 0,\quad (\beta) : x + 2y - 3z + 5 = 0$

Mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng ấy có phương trình là :

A. $x + 2y - 3z - 1 = 0$; B. $x + 2y - 3z - 3 = 0$;

B. $x + 2y - 3z + 5 = 0$; C. $x + 2y - 3z + 3 = 0$

55.24$^{(P)}$. Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha) : x + 2y - 2z - 3 = 0,\ (\beta) : 3x + 4z + 5 = 0$

Các mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng ấy có phương trình là :

A. $\left[\begin{array}{l} 2x + y + 5z + 15 = 0 \\ 7x + 11y - 5z = 0 \end{array}\right.$; B. $\left[\begin{array}{l} 2x - 5y + 11z - 3 = 0 \\ 14z + 10y + 2z - 15 = 0 \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} 2x + y + 5z - 15 = 0 \\ 7x + 11y - 5z + 3 = 0 \end{array}\right.$; C. $\left[\begin{array}{l} 2x + 5y - 11z + 15 = 0 \\ 14z + 10y - 2z - 3 = 0 \end{array}\right.$

55.25$^{(P)}$. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2y = 0$ có phương trình là :

A. $2x - y + z - 3 = 0$; B. $2x + 2y - z + 1 = 0$;

B. $x + 3y - 3z = 0$; C. $2x + y - z + 1 = 0$.

§4. Phương trình đường thẳng

I. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình đường thẳng

1.1. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ có :

* *Phương trình tham số* là : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

(Nhiều khi để đơn giản, người ta thường không ghi $t \in \mathbb{R}$)

* *Phương trình chính tắc* là : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, $abc \neq 0$

1.2. Nếu đường thẳng (Δ) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{và} \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

thì :

* Điểm $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\Delta)$ khi và chỉ khi $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} Ax + Bx + Cx + D = 0 \\ A'x + B'x + C'x + D' = 0 \end{cases}$$

* Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'}$, với $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n'} = (A'; B'; C')$.

2. Điều kiện để hai đường thẳng song song, trùng nhau, cắt nhau hoặc chéo nhau

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$, (Δ') là đường thẳng đi qua điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (a'; b'; c')$. Ta có :

❶ (Δ) và (Δ') đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $(\vec{u} \wedge \vec{u'}).\overrightarrow{M_0M'_0} = 0$.

❷ $(\Delta) \equiv (\Delta')$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \wedge \vec{u'} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{M_0M'_0} = 0$.

❸ $(\Delta) // (\Delta')$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{u'} = \vec{0} \\ \vec{u} \wedge \overrightarrow{M_0M'_0} \neq \vec{0} \end{cases}$.

❹ (Δ) cắt (Δ') $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{u'} \neq \vec{0} \\ (\vec{u} \wedge \vec{u'}).\overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \end{cases}$.

❺ (Δ) chéo (Δ') $\Leftrightarrow$ $(\vec{u} \wedge \vec{u'}).\overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0$.

❻ $(\Delta) \perp (\Delta')$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{u'} = 0$.

➢ *Chú ý:* Nếu các đường thẳng (Δ), (Δ') được cho dưới dạng phương trình, ta cũng có thể xét vị trí tương đối của chúng bằng cách dựa vào số nghiệm của hệ phương trình (tạo thành gồm các phương trình của (Δ) và (Δ')). Khi đó

❶ (Δ) cắt (Δ') $\Leftrightarrow$ Hệ có một nghiệm duy nhất.

❷ $(\Delta) \equiv (\Delta')$ $\Leftrightarrow$ Hệ vô số nghiệm.

❸ $(\Delta) // (\Delta')$ $\Leftrightarrow$ Hệ vô số nghiệm và các vectơ chỉ phương của chúng cùng phương.

❹ (Δ) chéo (Δ') $\Leftrightarrow$ Hệ vô số nghiệm và các vectơ chỉ phương của chúng không cùng phương.

3. Điều kiện để một đường thẳng song song, cắt nhau hoặc vuông góc với một mặt phẳng

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$, (α) là mp có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$. Ta có :

❶ $(\Delta) // (\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\vec{a} = 0$ và $M_0 \notin (\alpha)$

❷ $(\Delta) \subset (\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\vec{a} = 0$ và $M_0 \in (\alpha)$

❸ (Δ) cắt (α) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\vec{a} \neq 0$

❹ $(\Delta) \perp (\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n} = k\vec{a}$

4. Góc

- Gọi (Δ), (Δ') theo thứ tự có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u'} = (a'; b'; c')$. Góc φ giữa hai đường thẳng ấy được tính theo công thức :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|} = \frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad (0 \le \varphi \le 90^0)$$

• Gọi (Δ) là đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$, (α) là mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$. Góc φ giữa đường thẳng và mặt phẳng ấy được tính theo công thức :

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (0 \le \varphi \le 90^0)$$

5. Khoảng cách

• Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$

Khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính theo công thức:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{u}|}$$

• Cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ') chéo nhau, trong đó

(Δ) đi qua điểm M_0, có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$,

(Δ') là đi qua điểm M'_0, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}$

Khoảng cách giữa chúng được tính theo công thức: $d(\Delta, \Delta') = \dfrac{|(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{u} \wedge \vec{u'}|}$

II. Các bài toán và kỹ thuật cơ bản

Bài toán 1. Chuyển đổi phương trình đường thẳng

Thí dụ 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ), nếu :

1) $(\Delta): \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{5}$; 2) $(\Delta): \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-7}{-3}$.

Lời giải

1) Đặt $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{5} = t \Rightarrow \begin{cases} x-2=3t \\ y-1=-2t \\ z+1=5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \\ z=-1+5t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{R}$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng (Δ).

2) Đặt $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-7}{-3} = t \Rightarrow \begin{cases} x+3=t \\ y=2t \\ z-7=-3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+t \\ y=2t \\ z=7-3t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{R}$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng (Δ).

Thí dụ 2. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ), nếu :

1) $(\Delta): \begin{cases} x=4+3t \\ y=1-2t \\ z=-9+t \end{cases}$; 2) $(\Delta): \begin{cases} x=1-7t \\ y=5t \\ z=13+4t \end{cases}$

Lời giải

1) Ta có $\begin{cases}x=4+3t\Rightarrow x-3=3t\\ y=1-2t\Rightarrow y-1=-2t\\ z=-9+t\Rightarrow z+9=t\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+9}{1}$ (do cùng bằng t)

Đó là phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ).

2) Ta có $\begin{cases}x=1-7t\Rightarrow x-1=-7t\\ y=5t\\ z=13+4t\Rightarrow z-13=4t\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-13}{4}$.

Đó là phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ).

Thí dụ 3. Viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (Δ), nếu (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha): x-3y+z=0$ và $(\alpha'): x+y-z+4=0$

Lời giải

1) *Cách* 1. *Đổi một ẩn thành tham số* :

- Điểm $M(x; y; z)\in(\Delta)$ khi và chỉ khi toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$(*)\begin{cases}x-3y+z=0\\ x+y-z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=3y\\ x-z=-4-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2+y\\ z=2-2y\end{cases}\qquad(1)$$

Đặt $y=t$, ta có (1) $\Leftrightarrow$ $(x=-2+t; y=t; z=2-2t)$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng (Δ).

Cách 2. *Tìm điểm và vectơ chỉ phương* :

+ Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α), (α') lần lượt là

$$\vec{n}=(1;-3;1),\ \vec{n'}=(1;1;-1)$$

+ Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là

$$\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n'}=\left(\begin{vmatrix}-3&1\\1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-3\\1&1\end{vmatrix}\right)=(2;2;4).$$

Xét hệ $\begin{cases}x-3y+z=0\\ x+y-z+4=0\end{cases}$. Cho $y=0$ ta có $\begin{cases}x+z=0\\ x-z=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ z=2\end{cases}$ nên có $M(-2; 0; 2)$ là một điểm thuộc (Δ).

Thay thế $\vec{u}$ bởi $\dfrac{1}{2}\vec{u}$ ta có phương trình tham số của của đường thẳng (Δ) là

$$\begin{cases}x=-2+t\\ y=t\\ z=2-2y\end{cases}$$

Bài toán 2. Viết phương đường thẳng

***Kỹ thuật* 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có vectơ chỉ phương cho trước**

Thí dụ 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $M(1;-1;2)$, $\vec{u}=(2;-3;5)$ 2) $M(0;3;1)$, $\vec{u}=(1;2;0)$

Lời giải

1) *Cách 1 : (Viết phương trình chính tắc)*

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -3; 5)$ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{5}$

Cách 2 : (Viết phương trình tham số)

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -3; 5)$ là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 5t \end{cases} \qquad (1)$$

2) Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(0; 3; 1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 0)$ là $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

Chú ý : Đường thẳng ***không có phương trình chính tắc*** nếu trong toạ độ của vectơ chỉ phương có một thành phần **bằng 0.**

Nhắc lại: "*Hình thức*" phương trình tham số của đường thẳng có thể sai khác số hạng đứng ngoài tham số. Chẳng hạn

Phương trình tham số của đường thẳng ở câu 1 là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ (2)

Chẳng qua trong (1) ta thay t bởi $t' = t - 1$ ta có $\begin{cases} x = 1 + 2(t' - 1) \\ y = -1 - 3(t' - 1) \\ z = 3 + 5(t' - 1) \end{cases}$

Đó là phương trình (2).

Nói khác đi $M(0; 3; 1)$ và $M'(-1; 2; -2)$ là hai điểm mà đường thẳng (Δ) đi qua. (Kết quả (1) sử dụng điểm M, kết quả (2) sử dụng điểm M'). Bạn nhớ điều này để kiểm tra bài làm của mình khi thấy kết quả của bài làm chưa giống với đáp án.

Lời bình: Cũng như vectơ pháp tuyến của mặt phẳng, thường người ta cho vectơ chỉ phương của đường thẳng *náu ẩn* trong mặt phẳng hoặc đường thẳng khác có quan hệ song song hoặc vuông góc với đường thẳng cần tìm. Các bạn theo dõi Thí dụ tiếp theo.

Thí dụ 5. Viết phương trình đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua điểm $M(0; 3; 1)$ và vuông góc với mp (α) : $8x + 4y + 3z - 1 = 0$.

2) Đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và song song với đường thẳng (Δ') :

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{3} \qquad (1)$$

Lời giải

1) Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (8; 4; 3)$. Đường thẳng (Δ) vuông góc với mp(α) $\Leftrightarrow$ (Δ) nhận $\vec{n} = (8; 4; 3)$ làm vectơ chỉ phương. Khi đi qua $M(0; 3; 1)$, (Δ) có phương trình là

$$\frac{x}{8}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{3}$$

2) Đường thẳng đi qua điểm $M(2;\ 1;\ -1)$ có cùng vectơ chỉ phương đường thẳng (Δ'): $\frac{x-1}{7}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+2}{3}$ có phương trình là $\frac{x-2}{7}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{3}$ (2)

Thay toạ độ điểm $M(2;\ 1;\ -1)$ vào (1) có $\frac{1}{7}=-4$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ Điểm $M\notin(\Delta)$. Vậy nên (2) là phương trình đường thẳng cần tìm.

Lời nhắn: Hai đường thẳng (Δ), (Δ') lần lượt có phương trình

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},\qquad \frac{x-x'_0}{a}=\frac{y-y'_0}{b}=\frac{z-z'_0}{c}$$

là hai đường thẳng có cùng vectơ chỉ phương. Đừng vội vàng kết luận đó là hai đường thẳng song song, mặc dù $(x_0;\ y_0;\ z_0)\neq(x'_0;\ y'_0;\ z'_0)$. (Xem phần "*Nhắc lại*" sau Thí dụ 2)

Nếu $\overrightarrow{M_0M'_0}=(x_0-x'_0;\ y_0-y'_0;\ z_0-z'_0)$ cùng phương với $\vec{u}=(a;\ b;\ c)$ thì $(\Delta)\equiv(\Delta')$

Nếu $\overrightarrow{M_0M'_0}$ khác phương với $\vec{u}$ thì $(\Delta)\ //\ (\Delta')$

Thí dụ 6. Viết phương trình đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua điểm $M(1;\ -2;\ 0)$ và vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{u'}=(1;\ 2;\ 5)$

2) Đi qua điểm $M(1;\ 1;\ 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\alpha): x-2y+z=0 \quad \text{và} \quad (\alpha'): 3x-y-z+5=0$$

Lời giải

1) Đường thẳng (Δ) vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{u'}=(1;\ 2;\ 5)\Rightarrow$ (Δ) có vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}\wedge\vec{u'}=\left(\begin{vmatrix}-1&2\\2&5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&3\\5&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}\right)=(-9;\ -13;\ 7)$$

Khi đi qua $M(1;\ -2;\ 0)$, đường thẳng (Δ) có mặt phẳng là : $\frac{x-1}{-9}=\frac{y+2}{-13}=\frac{z}{7}$

2) Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α), (α') theo thứ tự là

$$\vec{n}=(1;\ -2;\ 1),\ \vec{n'}=(3;\ -1;\ -1),$$

Đường thẳng (Δ) vuông góc với hai mặt phẳng (α) và $(\alpha')\Rightarrow(\Delta)$ có vectơ chỉ phương là

$$\vec{n}\wedge\vec{n'}=\left(\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-2\\3&-1\end{vmatrix}\right)=(3;\ 4;\ 7)$$

Khi đi qua $M(1;\ 1;\ 1)$, đường thẳng (Δ) có mặt phẳng là

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{7} \qquad (*)$$

Kỹ thuật 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Cho hai điểm $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_A-x_B;\ y_A-y_B;\ z_A-z_B)$. Đường thẳng AB được hiểu là đường thẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương.

Vậy nên đường thẳng AB có phương trình là

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

hay $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A}$ nếu ($x_A \neq x_B; y_A \neq y_B; z_A \neq z_B$)

Thí dụ 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B trong mỗi trường hợp sau

1) $A(1; 0; 3), B(2; 2; -1)$; 2) $A(2; 1; 1), B(1; 1; 3)$.

Lời giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -4)$. Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$

2) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 2)$. Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

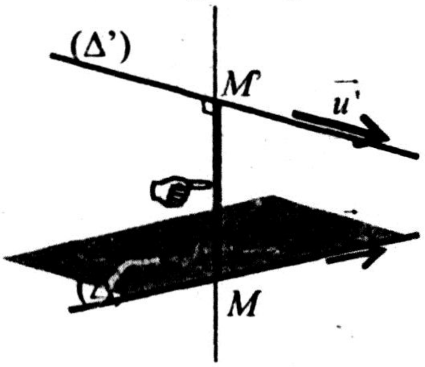
***Kỹ thuật* 3. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau**

Cho hai đường thẳng chéo nhau (Δ) với vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$, (Δ') với vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (a'; b'; c')$. (h.60)

Lấy điểm $M \in$ (Δ) và $M' \in$ (Δ').

Đường thẳng MM' là đường vuông góc chung của hai đường thẳng (Δ) và (Δ')

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MM' \perp (\Delta) \\ MM' \perp (\Delta') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \\ \vec{u'}.\overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases} \quad (*)$$



Hình 60

Giải hệ (*) ta tìm được M và $\overrightarrow{MM'}$. Đó là một điểm và vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung. Công việc tiếp theo là viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm ấy.

Thí dụ 8. Trong hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng (Δ), (Δ') lần lượt có phương trình

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}, \quad (\Delta'): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

1) Chứng tỏ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau.
2) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng ấy.
3) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ')

Lời giải

1) Đường thẳng (Δ) đi qua $A(1; 2; -2)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; -2)$

Đường thẳng (Δ') đi qua $A'(2; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (1; -1; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AA'} = (1; -1; -3), \overrightarrow{AA'}.(\vec{u} \wedge \vec{u'}) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau. ■

2) Mỗi điểm M thuộc (Δ) có toạ độ $(1 + t; 2 + t; -2 - 2t)$

Mỗi điểm M' thuộc (Δ') có toạ độ $(2 + t'; 1 - t'; 1)$.

Vậy nên $\overrightarrow{MM'} = (1 + t' - t; -1 - t' - t; 3 + 2t)$.

Ta có $\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 1(1 + t' - t) + 1(-1 - t' - t) - 2(3 + 2t) = -6t - 6$

$\vec{u'}.\overrightarrow{MM'} = 1(1 + t' - t) - 1(-1 - t' - t) - 0(3 + 2t) = 2t' + 2$

- MM' là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \\ \vec{u'}.\overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t - 6 = 0 \\ 2t' + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$

Vậy nên $M = (0; 1; 0)$, $\overrightarrow{MM'} = (-1; 1; 1)$ và phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (Δ) và (Δ') là $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ ■

3) Khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') là độ dài đoạn thẳng MM'.

Do vậy $d(\Delta, \Delta') = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ■

Lời bình: Để viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (Δ) và (Δ'), bạn cần phải biểu thị toạ độ các điểm $M \in (\Delta)$, $M' \in (\Delta')$ theo tham số.

Thí dụ 9. Trong hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng (Δ), (Δ') lần lượt có phương trình

$$(\Delta): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}, (1) \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} (2)$$

1) Chứng tỏ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau.
2) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng ấy.
3) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ').

Lời giải

1) Thế (2) vào (1) ta có

$$\frac{3-t}{1} = \frac{t-2}{1} = \frac{3t+2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t = t - 2 \\ t - 2 = 3t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 5 \\ t = 1 \end{cases} \text{vô nghiệm.} \qquad (3)$$

Vectơ chỉ phương của (Δ) và (Δ') lần lượt là $\vec{u} = (1; 2; -1)$, $\vec{u'} = (-1; 2; -3)$.

Thấy rằng $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{u'}$. (4)

Từ (3), (4) ⇒ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau. ■

2) Viết lại $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Mỗi điểm M thuộc (Δ) có toạ độ $(1 + t; 3 + 2t; -1 - t)$

Mỗi điểm M' thuộc (Δ') có toạ độ $(4 - t'; 1 + 2t'; 1 + 3t')$.

Vậy nên $\overrightarrow{MM'} = (3 - t' - t; -2 + 2t' - 2t; 2 + 3t' + t)$.

Ta có $\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = (3 - t' - t) + 2(-2 + 2t' - 2t) - (2 + 3t' + t) = 3(1 - 2t)$

$\vec{u'}.\overrightarrow{MM'} = -(3 - t' - t) + 2(-2 + 2t' - 2t) - 3(2 + 3t' + t) = 3(1 - 2t - 2t')$

- MM' là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \\ \vec{u'}.\overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2t = 0 \\ 1 - 2t - 2t' = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{ t = \dfrac{1}{2}, t' = 0 \}$

Vậy nên $M'=(4; 1; 1)$, $\overrightarrow{MM'} = (\frac{5}{2}; -3; \frac{5}{2}) \Rightarrow 2\overrightarrow{MM'}(5; -6; 5)$

Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (Δ) và (Δ') là

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-1}{5}. \blacksquare$$

3) Khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') là độ dài đoạn thẳng MM'. Do vậy

$$2d(\Delta, \Delta') = \sqrt{5^2 + (6)^2 + 5^2} = \sqrt{86} \Leftrightarrow d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{86}}{2}. \blacksquare$$

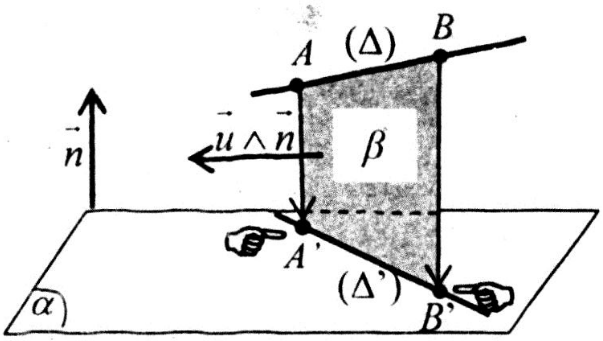
***Kỹ thuật* 4. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (Δ) trên mặt phẳng (α)**

Cách 1 (h.61a). + Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (Δ) và (β) ⊥ (α)

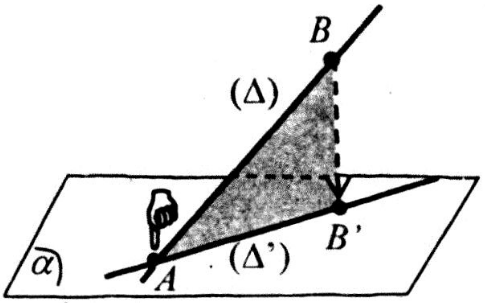
+ Khi đó $(\beta) \cap (\alpha)$ là hình chiếu của (Δ) trên (α).

+ Đổi hệ phương trình biểu diễn $(\beta) \cap (\alpha)$ thành phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc.

Cách 2, + Lấy hai điểm *A*, *B* thuộc (Δ)



Hình 61a



Hình 61b

+ Xác định hình chiếu *A*', *B*' trên mp(α) của hai điểm *A*, *B*.

+ Viết phương trình đường thẳng *A*'*B*'.

Đó là phương trình hình chiếu của (Δ) trên (α).

Thường nên lấy $A = (\Delta) \cap (\alpha)$. (h.61b)

Kể từ đây, cụm từ *hình chiếu vuông góc* nhiều khi được gọi đơn giản là *hình chiếu.*

Thí dụ 10. Cho đường thẳng (Δ) : $\frac{2x-7}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ và mp(α) : $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(α).

Lời giải

Cách 1 : Dễ thấy $B(-1; 3; 3)$ là một điểm thuộc (Δ)

Ta có vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (1; 2; -2)$, vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = (\frac{3}{2}; -1; -1)$, Gọi ($\beta$) là mặt phẳng chứa đường thẳng (Δ) và vuông góc với mặt phẳng (α). Đó cũng là mặt phẳng đi qua *B* và nhận $\vec{n} \wedge \vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (β) có phương trình

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}(x+1) + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}(y-3) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix}(z-3) = 0$$

$\Leftrightarrow -4(x+1) - 2(y-3) - 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 7 = 0.$

- Đường thẳng (Δ') là hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mặt phẳng (α)

$\Leftrightarrow (\Delta') = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow$ Các điểm thuộc (Δ') là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 + 2z \\ 2x + y = 7 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -1 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (1)$$

Vậy (1) là phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mặt phẳng (α).

Cách 2:

+ Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $x_1 + 2y_1 - 2z_1 - 2 = 0$ (2)

Gọi $A = (\Delta) \cap (\alpha)$. Thế thì :

- Điểm $I \equiv A \Leftrightarrow \dfrac{2x_1 - 7}{3} = \dfrac{y_1}{-1} = \dfrac{-z_1}{1} = \dfrac{(2x_1 - 7) + 4y_1 - 4z_1}{3 - 4 + 4}$

$$= \frac{2\overbrace{(x_1 + 2y_1 - 2z_1 - 2)}^{=0} - 3}{3} = -1 \Rightarrow (x_1 = 2; y_1 = z_1 = 1) \Rightarrow A = (2; 1; 1).$$

+ $\overrightarrow{AI} = (x_1 - 2; y_1 - 1; z_1 - 1)$.

Rõ ràng $B(-1; 3; 3) \in (\Delta)$. $\overrightarrow{BI} = (x_1 + 1; y_1 - 3; z_1 - 3)$,

Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên (α). Thế thì :

- Điểm $I \equiv B' \Leftrightarrow BI \perp (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{1} = \frac{y_1 - 3}{2} = \frac{z_1 - 3}{-2} = \frac{(x_1 + 1) + 2(y_1 - 3) - 2(z_1 - 3)}{1 + 2.2 - 2.(-2)}$$

$$= \frac{\overbrace{(x_1 + 2y_1 - 2z_1 - 2)}^{=0} + 3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(x_1 = -\frac{2}{3}; y_1 = \frac{11}{3}; z_1 = \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} \equiv \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Hình chiếu (Δ') của (Δ) trên (α) là đường thẳng đi qua A và nhận $\frac{3}{4}\overrightarrow{B'A} = (2; -2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên nó có phương trình là: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$

Thí dụ 11. Cho đường thẳng $(\Delta) : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{1}$ và mp$(\alpha) : x + y - 3z - 3 = 0$.

a) Tìm giao điểm của (Δ) và mp(α).

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(α)

Lời giải

Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $x_1 + y_1 - 3z_1 - 3 = 0$ (1)

a) Gọi $A = (\Delta) \cap (\alpha)$.

- Điểm $I \equiv A \Leftrightarrow \dfrac{x_1 - 1}{2} = \dfrac{y_1}{-3} = \dfrac{z_1 + 2}{1} = \dfrac{x_1 - 1 + y_1 - 3(z_1 + 2)}{2.1 - 3.1 - 3.1} =$

$$= \frac{\overbrace{(x_1 + y_1 - 3z_1 - 3)}^{=0} - 4}{-4} = 1 \Rightarrow \{x_1 = 3; y_1 = -3; z_1 = -1). \text{ Vậy } A = (3; -3; -1).$$

b) Ta có $\overrightarrow{AI} = (x_1 - 3; y_1 + 3; z_1 + 1)$. Rõ ràng $B(1; 0; -2) \in (\Delta)$,
$\overrightarrow{BI} = (x_1 - 1; y_1; z_1 + 2)$. Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (1; 1; -3)$.
Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên (α).

- Điểm $I \equiv B' \Leftrightarrow BI \perp (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1 + 2}{-3} = \frac{x_1 - 1 + y_1 - 3(z_1 + 2)}{1.1 + 1.1 - 3(-3)} = \frac{\overbrace{(x_1 + y_1 - 3z_1 - 3)}^{=0} - 4}{11} = -\frac{4}{11}$$

$$\text{(Do có (1))} \Rightarrow (x_1 = \frac{7}{11}; y_1 = -\frac{4}{11}; z_1 = -\frac{10}{11}) \Rightarrow \overrightarrow{AB'} \equiv \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{26}{11}; \frac{29}{11}; \frac{1}{11}\right).$$

- Hình chiếu (Δ') của (Δ) trên mp(α) là đường thẳng đi qua A và nhận $11\overrightarrow{AB'} = (26; -29; 1)$ làm vectơ chỉ phương. Vậy nên nó có phương trình là

$$\frac{3 - x}{26} = \frac{y + 3}{29} = \frac{z + 1}{1} \quad ■$$

Cách 2 : Dễ thấy $B(1; 0; -2)$ là một điểm thuộc (Δ).

Ta có vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (1; 1; -3)$, vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = (2; -3; 1)$, Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng (Δ) và vuông góc với mặt phẳng (α). Đó cũng là mặt phẳng đi qua B và nhận $\vec{u} \wedge \vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (β) có phương trình

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}(x - 1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(x - 1) + 7y + 5(z + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x + 7y + 5z + 2 = 0$$

Đường thẳng (Δ') là hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mặt phẳng (α)
$\Leftrightarrow (\Delta') = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow$ Toạ độ các điểm thuộc (Δ') là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 8x + 7y + 5z + 2 = 0 \\ x + y - 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y + 5z = -8x - 2 \\ y - 3z = 3 - x \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -26; \; D_y = \begin{vmatrix} -8x - 2 & 5 \\ 3 - x & -3 \end{vmatrix} = 29x + 9; \; D_z = \begin{vmatrix} 7 & -8x - 2 \\ 1 & 3 - x \end{vmatrix} = x - 19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{9}{26} - \frac{29x}{26} \\ z = \frac{19}{26} - \frac{1x}{26} \end{cases} \Rightarrow \quad (x = 26t; y = -\frac{9}{26} - 29t; z = \frac{19}{26} - t) \qquad (2)$$

Vậy nên (2) là phương trình tham số của (Δ') – hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mặt phẳng (α). ■

***Kỹ thuật* 5. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước**

Cho hai đường thẳng chéo nhau (Δ), (Δ') và điểm M.

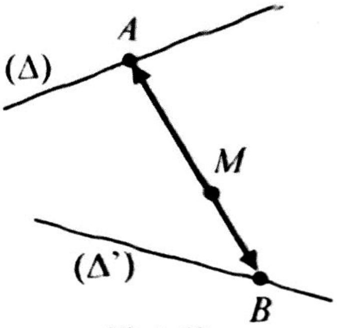
Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$. Đường thẳng (Δ') có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}$

Cách 1: (h.62a). *Đường thẳng (d) đi qua M cắt (Δ) tại A, cắt (Δ') tại B khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng. Do vậy ta có lời giải như sau :*

- Lấy $A\in(\Delta)$, $B\in(\Delta')$ là các điểm có toạ độ bằng tham số.
- Lập các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$
- M, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$ (*)

Các nghiệm (nếu có) của (*) sẽ cho $\overrightarrow{MA}$ (hoặc $\overrightarrow{MB}$)

- Viết đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MA}$ (hoặc $\overrightarrow{MB}$). Đó là đường thẳng cần tìm.

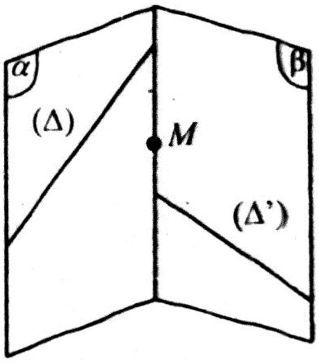


Hình 62a

Cách 2: (h.62b) *Đường thẳng (d) đi qua M và cắt hai đường thẳng (Δ) và (Δ') thì (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) = (M, Δ) và (β) = (M, Δ'). Từ đó ta có lời giải như sau :*

- Viết phương trình mp(α) qua M và (Δ)
- Viết phương trình mp(β) qua M và (Δ')
- Viết phương trình chính tắc hoặc tham số của đường thẳng $(d) = (\alpha)\cap(\beta)$

Nếu (d) đồng thời không cùng phương với (Δ) và (Δ') thì đó là đường thẳng cần tìm. Nếu (d) cùng phương với một trong (Δ) và (Δ') thì bài toán không có lời giải.



Hình 62b

Thí dụ 12. Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; -1; 1)$ và cắt cả hai đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$, (Δ') : $\begin{cases} x = -2-t \\ y = 3+3t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1. Lấy $A(2+2t; -1+t; 2-t)$ là một điểm thuộc (Δ).

Lấy $B(-2-t'; 3+3t'; -t')$ là một điểm thuộc (Δ').

Ta có : $\overrightarrow{MA} = (1+2t; t; 1-t)$, $\overrightarrow{MB} = (-3-t'; 4+3t'; -1-t')$.

Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3-t' = k(1+2t) \\ 4+3t' = kt \\ 1+t' = k(t-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-t' = k+2kt & (1) \\ 4+3t' = kt & (2) \\ 1+t' = kt-k & (3) \end{cases}$$

Từ (2), (3) suy ra $3+2t' = k \Leftrightarrow 9+6t' = 3k$ (4)

Ta có (3) $\Leftrightarrow 2+2t' = 2kt-2k$.

Cộng theo từng vế vào đẳng thức (1) có $-5-3t' = 3k$ (5)

Trừ theo từng vế vào đẳng thức (4) và (5) có $14+9t' = 0 \Rightarrow t' = -\dfrac{19}{4}$

Với $t' = -\dfrac{19}{4}$, ta có $\overrightarrow{MB} = \left(-\dfrac{13}{9}; -\dfrac{6}{9}; \dfrac{5}{9}\right)$.

Đường thẳng AB được hiểu là đường thẳng qua M nhận $-9\overrightarrow{MB} = (13; 6; -5)$ làm vectơ chỉ phương. Vậy nên nó có phương trình là $\begin{cases} x = 1+13t \\ y = -1+6t \\ z = 1-5t \end{cases}$ ■

Cách 2 : Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng (Δ), (β) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng (Δ'), (d) là đường thẳng đi qua M và cắt cả hai đường thẳng (Δ) và (Δ'). Rõ ràng nếu (d) tồn tại thì $(d) = (\alpha) \cap (\beta)$.

- Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(2; -1; 2)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -1)$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (1; 0; 1),\quad \vec{u}.\overrightarrow{MA} = \left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right) = (1; -3; -1)$$

- Mặt phẳng (α) đi qua M và (Δ) là mặt phẳng đi qua M và nhận $\vec{u}.\overrightarrow{MA}$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (α) có phương trình là :

$$(x-1) - 3(y+1) - (z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y - z - 3 = 0$$

- Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $B(-2; 3; 0)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (-1; 3; -1)$. Ta có

$$\overrightarrow{MB} = (-3; 4; -1),\quad \vec{u'}.\overrightarrow{MB} = \left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 4\end{vmatrix}\right) = (1; 2; 5)$$

- Mặt phẳng (β) đi qua M và (Δ') là mặt phẳng đi qua M và nhận $\vec{u'}.\overrightarrow{MB}$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (β) có phương trình là :

$$(x-1) + 2(y+1) + 5(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + 5z - 4 = 0$$

- Toạ độ (d) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - z - 3 = 0 \\ z + 2y + 5z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 3y + 3 & (6) \\ x + 5z = -2y + 4 & (7) \end{cases}$

Trừ theo từng vế đẳng thức (7) cho (6) có $6z = -5y + 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}y$ (8)

Ta có $x = 3y + z + 3 = 3y + (\frac{1}{6} - \frac{5}{6}y) + 3 = \frac{19}{6} + \frac{13}{6}y$

Đặt $y = 6t$ ta có $\left(x = \frac{19}{6} + 13t;\ y = 6t;\ z = \frac{1}{6} - 5t\right)$. (9)

Thấy rằng vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ không cùng phương với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ nghĩa là (d) cắt cả hai đường thẳng (Δ) và (Δ'). Vậy (9) là mặt phẳng đường thẳng phải tìm.

Lời bình : Như đã nói trong **Nhắc lại** sau Thí dụ 4 ở §4, bạn *đừng băn khoăn* khi thấy các hạng tử đứng ngoài tham số của phương trình đường thẳng (d) trong hai cách giải trên.

Trong kết quả cách 1 : Đường thẳng (d) chứa điểm $D_1(1; -1; 1)$

Trong kết quả cách 2 : Đường thẳng (d) chứa điểm $D_2\left(\frac{19}{6}; 0; \frac{1}{6}\right)$

Ta có $\overrightarrow{D_1D_2} = \left(\frac{19}{6} - 1; 0 + 1; \frac{1}{6} - 1\right) = \left(\frac{13}{6}; 1; -\frac{5}{6}\right)$, Rõ ràng $6.\overrightarrow{D_1D_2} = \vec{u} = (13; 6; -5)$.

Vậy hai kết quả chỉ là một.

Thí dụ 13: Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2; -7; -9)$ và cắt cả hai đường thẳng $(\Delta) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$, $(\Delta') : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1. • Lấy $A(-1+t;\ 1+2t;\ 2+3t)$ là một điểm trên (Δ),

$B(1-2t';\ -1+2t';\ 1+t')$ là một điểm trên (Δ').

Ta có $\overrightarrow{MA} = (1+t;\ 8+2t;\ 11+3t)$, $\overrightarrow{MB} = (3-2t';\ 6+2t';\ 10+t')$.

Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+t = k(3-2t') \\ 8+2t = k(6+2t') \\ 11+3t = k(10+t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t = 3k-2kt' & (2) \\ 8+2t = 6k+2kt' & (3) \\ 11+3t = 10k+kt' & (4) \end{cases}$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức (2) và (4) có $9+3t = 9k \Leftrightarrow t = 3(k-1)$

Nhân (4) với 2 rồi cộng vào (1) có $23+7t = 23k \Leftrightarrow 7t = 23(k-1)$

Ta có hệ $\begin{cases} t = 3(k-1) \\ 7t = 23(k-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = 1 \end{cases}$ Với $\begin{cases} t = 0 \\ k = 1 \end{cases}$ thì $(2) \Leftrightarrow 1 = 0$ (!)

Mâu thuẫn chứng tỏ đẳng thức $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$ không bao giờ xảy ra. Nghĩa là không tồn tại đường thẳng đi qua điểm M đồng thời cắt cả hai đường thẳng (Δ) và (Δ')

Cách 2.(h.64)• Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và chứa đường thẳng (Δ).

Vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = (1;\ 2;\ 3)$ và chứa điểm $A(-1;\ 1;\ 2)$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (1;\ 8;\ 11),\ \vec{u}\wedge\overrightarrow{MA} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 11 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}\right) = (-2;\ -8;\ 6).$$

Mặt phẳng (α) được hiểu là mặt phẳng đi qua M và nhận $-\frac{1}{2}(\vec{u}\wedge\overrightarrow{MA}) = (1;\ 4;\ -3)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (α) có phương trình là : $(x+2) + 4(y+7) - 3(z+9) = 0$ $\Leftrightarrow x + 4y - 3z + 3 = 0$

• Gọi (β) là mặt phẳng đi qua M và chứa đường thẳng (Δ').

Vectơ chỉ phương của (Δ') là $\vec{u'} = (-2;\ 2;\ 1)$ và chứa điểm $B(1;\ -1;\ 0)$.

$$\text{Ta có } \vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = (1;\ 2;\ 3),\ \vec{u'}\wedge\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (4;\ 7;\ -6).$$

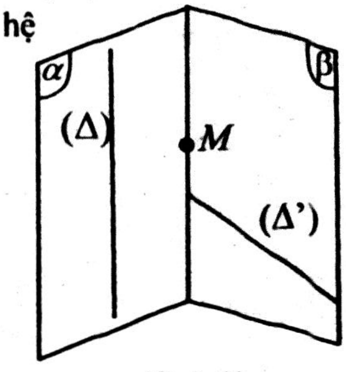
Mặt phẳng (β) được hiểu là mặt phẳng đi qua M và nhận $(\vec{u'}\wedge\vec{v})$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (β) có phương trình là :

$$4(x+2) + 7(y+7) - 6(z+9) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 6z + 3 = 0$$

• Đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng (Δ) và (Δ')

$\Leftrightarrow\ d = (\alpha)\cap(\beta) \Leftrightarrow$ Toạ độ các điểm thuộc (d) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 4y - 3z + 3 = 0 \\ 4x + 7y - 6z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad (1)$$



Hình 63

Vậy (1) là phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có vectơ chỉ phương cùng với vectơ chỉ phương của (Δ) nên (d) không phải là đường thẳng cắt (Δ).

Bài toán không có lời giải.

Lời bình

Khi tìm được giao tuyến $d = (\alpha)\cap(\beta)$, bạn đường vội vàng kết luận đó là đường thẳng cần tìm. Có thể xảy ra (d) //(Δ) như Thí dụ trên

Bài toán 3. Tính khoảng cách

Kỹ thuật 6. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Sử dụng công thức: $d(M_1,\Delta) = \dfrac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{u}|}$

Thí dụ 14: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) trong mỗi một trường hợp sau :

a) $M = (-1; 2; 2)$, (Δ) đi qua điểm $N(0; 3; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;3,\sqrt{6})$

b) $M = (2; 5; 1)$, (Δ) có phương trình $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

Lời giải

a) Ta có $|\vec{u}| = 4$, $\overrightarrow{MN} = (1; 1; 0)$,

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{MN} = \left(\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-\sqrt{6}; \sqrt{6}; -2),$$

$$|\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{6+6+4} = 4$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) bằng $\dfrac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MN}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{4}{4} = 1$. ■

b) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(-2; 2; -1)$ và có vectơ chỉ phương của là $\vec{u} = (1; 2; -2)$.
Ta có $\vec{u}| = 3$, $\overrightarrow{M_0M} = (-4; -1; 1)$,

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_0M} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4; 7; 9),$$

$$|\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{146}$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) bằng $\dfrac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{146}}{3}$. ■

Lời bình: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{1}$$

Kỹ thuật 7. Tính khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng song song với nó

Sử dụng công thức khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

$$d(M_0;(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Thí dụ 15: Tính khoảng cách từ đường thẳng (Δ) : đến mặt phẳng

$$(\alpha): 2x - 2y + z - 7 = 0$$

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 0; -5)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 1)$, vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (3; 1; 1)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng (Δ) là

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|2.1 - 2.0 + 1(-5)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3} = 1 \qquad (1)$$

Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 2.3 - 2.2 + 12 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(\Delta) // (\alpha)$ nên có $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = 1$. ■

Kỹ thuật 8. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ') chéo nhau, trong đó

(Δ) đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$,

(Δ') là đi qua điểm M', có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}$

- Khoảng cách giữa chúng được tính theo công thức: $d(\Delta, \Delta') = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u} \wedge \vec{u'}|}$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau cũng có thể tính bằng *độ dài đoạn vuông góc chung*. (Bạn đã gặp trong các Thí dụ 8, 9 ở trên.)

Thí dụ 16$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta): \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0; 1; -1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 1; 2)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(0; 2; -4)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (-1; 3; 3)$. Ta có :

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-3;\ 1;\ -2\ ),\ |\vec{u} \wedge \vec{u'}| = \sqrt{14},$$

$$\overrightarrow{MM'} = (0; 1; -3),\ (\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'} = 0.(-3) + 1.1 - 3(-2) = 7 \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u} \wedge \vec{u'}|} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

Thí dụ 17$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') trong đó:

+ (Δ) có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$,

+ (Δ') là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4 = 0$ và $(\alpha'): y + z - 4 = 0$

Lời giải

- Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; -1; 2)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$.
- Xét hệ $\begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$. Chọn $x = 0$, ta có $\begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$

⇒ Ta có $M'(0; 2; 4)$ là một điểm thuộc (Δ').

Vectơ pháp tuyến của (α), (α') lần lượt là $\vec{n} = (2; 3; 0)$, $\vec{n'} = (0; 1; 1)$.

Vectơ chỉ phương của (Δ') là $\vec{u'} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3; -2; 2)$.

Ta có $\vec{u}\wedge\vec{u'}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}\right)=(-2;-1;2).$

$|\vec{u}\wedge\vec{u'}|=3,\ \overrightarrow{MM'}=(-1;3;2)$

$(\vec{u}\wedge\vec{u'})\overrightarrow{MM'}\ =-2(-1)-1.3+2.2=3$

- Do $(\vec{u}\wedge\vec{u'}).\overrightarrow{MM'}\neq 0$ suy ra (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau và khoảng cách giữa hai chúng là $\dfrac{|(\vec{u}\wedge\vec{u'})\overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u}\wedge\vec{u'}|}=\dfrac{3}{3}=1$. ■

Thí dụ 18$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1-t\\ z=1\end{cases},\qquad (\Delta'):\begin{cases}x=2-3t\\ y=-2+3t\\ z=3\end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1;-1;1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;0)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(2;-2;3)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}=(-3;3;0)$. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(1;-1;2)$,

Thấy rằng $1:-1:0=-3:3:0\neq(1:-1:2)$ suy ra (Δ) // (Δ').

Vậy nên d(Δ, Δ') = d(M', (Δ)) (1)

Ta có $\vec{u}\wedge\overrightarrow{MM'}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-2;-2;0),$

$|\vec{u}\wedge\overrightarrow{MM'}|=2\sqrt{2}$, $\quad|\vec{u}|=\sqrt{2}$

Theo (1) ta có d(Δ, Δ') = d(M', (Δ)) = $\dfrac{|\vec{u}\wedge\overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$. ■

Lời bình: Trong những bài toán liên quan đến các khối đa diện, việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nhiều khi được *thay thế* bởi tính khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng ấy đến mặt phẳng song song đi qua đường thẳng còn lại.

Bài toán 4. Tính góc

Kỹ thuật 9. Tính góc giữa hai đường thẳng

Áp dụng công thức: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|}=\dfrac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$

Thí dụ 19$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta):\frac{x-3}{8}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{8},\qquad (\Delta'):\left(x=1+\sqrt{2}t;\ y=3-\sqrt{2}t;\ z=7\right)$$

Lời giải

Vectơ chỉ phương của (Δ), (Δ') lần lượt là $\vec{u}=(2;-1;2)$, $\vec{u'}=(1;-1;0)$

Gọi φ là góc giữa (Δ) và (Δ'), ta có :

$$\cos\varphi=\frac{|2.1-1(-1)+2.0|}{\sqrt{(2^2+(-1)^2+2^2)(1^2+(-1)^2+0^2)}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') bằng $\frac{\pi}{4}$. ■

Thí dụ 20$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta): \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-1}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x=-2+t \\ y=3+2t, \quad t\in\mathbb{R} \\ x=-5+t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;\,1;\,-1)$.

Đường thẳng (Δ') có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'}=(1;\,2;\,1)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') ta có

$$\cos\varphi=\frac{|2.1+1.2-1.1|}{\sqrt{(2^2+1^2+(-1)^2)(1^2+2^2+1^2)}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') bằng $\frac{\pi}{3}$. ■

Thí dụ 21$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ'), với :

$$(\Delta): \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}, \qquad (\Delta'): \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{16}=\frac{z+3}{5}$$

Lời giải

Vectơ chỉ phương của (Δ), (Δ') lần lượt là $\vec{u}=(3;\,-1;\,2)$, $\overrightarrow{u'}=(2;\,15;\,5)$

Gọi φ là góc giữa (Δ) và (Δ'), ta có :

$$\cos\varphi=\frac{|3.2-1.16+2.5|}{\sqrt{(3^2+(-1)^2+2^2)(2^2+15^2+5^2)}}=0\Rightarrow\varphi=90^0.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') bằng 90^0. ■

***Kỹ thuật* 10. Tính góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng**

Áp dụng công thức

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (0\le\varphi\le 90^0)$$

Thí dụ 22$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), với :

$$(\Delta): \frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+1}{-2}, \qquad (\alpha): x-z+12=0$$

Lời giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}=(2;\,1;\,2)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(1;\,0;\,1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), ta có

$$\sin\varphi=\frac{|2.1+1.0-2.(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

Vậy góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) bằng $\varphi=45^0$. ■

Thí dụ 23$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), với :

$$(\Delta):\begin{cases}x=7+2t\\ y=1+t\\ z=3-t\end{cases},\qquad (\alpha): 2x-y+z+1=0$$

Lời giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(2;-1;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), ta có

$$\sin\varphi=\frac{|2.2+1(-1)-1.1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30^0.$$

Vậy góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) bằng 30^0. ■

Thí dụ 24$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng $(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=5\\ z=1+\sqrt{3}t\end{cases}$ và mặt phẳng (Oxy)

Lời giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}=(1;0;\sqrt{3})$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{j}=(0;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (Oxy). Khi đó :

$$\sin\varphi=\frac{|1.0+0.0+\sqrt{3}.1|}{\sqrt{1+0+3}.\sqrt{0+0+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=60^0$$

Vậy góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (Oxy) bằng 60^0 ■

Bài toán 5. Xác định vị trí tương đối

Kỹ thuật 11. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Thí dụ 25$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\Delta):\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$, $(\Delta'):\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{2}$

b) $(\Delta):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{1}$, $(\Delta'):\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$

Lời giải

a) Cách 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1;-1;2)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(4;1;3)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}=(1;2;2)$. Ta có :

$$\vec{u}\wedge\vec{u'}=\left(\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}\right)=(2;-5;4)\neq\vec{0},\ \overrightarrow{MM'}=(3;2;1),$$

$$\Rightarrow(\vec{u}\wedge\vec{u'})\overrightarrow{MM'}=2.3-5.2+4.1=0$$

$\Rightarrow$ (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng cắt nhau. ■

Cách 2 : Thấy rằng 3 : 2 : 1 ≠ 1 : 2 : 2, điểm $M'(4;1;3)$ vừa thuộc (Δ') lại vừa thuộc đường thẳng (Δ) nên hai đường thẳng ấy cắt nhau.

b) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 2; 0)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(-2; 0; 1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (1; 3; -2)$. Ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = (-3; -2; 1),\ (\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'} = -3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= -3.1 - 2.5 + 1.8 = -5 \neq 0$$

⇒ (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau. ■

Thí dụ 26$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\Delta) : \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$, $\qquad (\Delta') : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 4 - 2t \\ z = -2t \end{cases}$,

b) $(\Delta) : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$, $\qquad (\Delta') : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$,

Lời giải

a) Cách 1 : Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; -2; -2)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2; 1; 1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(1; 4; 0)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (4; -2; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (0; 6; 2)$.

Thấy rằng $-2 : 1 : 1 = 4 : -2 : -2 \neq 0 : 6 : 2$ nên (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng song song.■

Cách 2 : Tiếp nối từ (1)

Ta có $\vec{u} \wedge \vec{u'} = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right) = (0; 0: 0) = \vec{0}$,

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'} = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right) = (2; 4; -12) \neq \vec{0}$$

Vậy nên (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng song song. ■

b) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(-2; -2; 5)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; 3)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(-5; 4; 14)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (1; -2; -3)$.

Ta có : $\overrightarrow{MM'} = (-3; 6; 9)$,

Thấy rằng $-1 : 2 : 3 = 1 : -2 : -3 = -3 : 6 : 9$ nên $(\Delta) \equiv (\Delta')$. ■

Kỹ thuật 12. Xác định vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Thí dụ 27$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

a) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{9} = \dfrac{z-13}{11}$, $\qquad (\alpha) : 3x + 7y - 8z + 1 = 0.$

b) $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $\qquad (\alpha) : 4x + 7y + 2z - 4 = 0.$

c) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+1}{1}$, $\qquad (\alpha) : 3x + y - z + 5 = 0.$

Lời giải

a) Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;\ 9;\ 11)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;\ 7;\ -8)$. Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 5.3 + 9.7 + 11.(-8) = -10 \neq 0$

Vậy nên đường thẳng (Δ) cắt mặt phẳng (α). ■

b) *Cách* 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(4;\ -2;\ 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;\ 0;\ 2)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4;\ 7;\ 2)$. Ta có :

- $\vec{u}.\vec{n} = -1.4 + 0.7 + 2.2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$ (1)
- Thay toạ độ điểm M vào phương trình mp(α) có $4.4 + 7(-2) + 2.1 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng). $\Rightarrow M \in (\alpha)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $(\Delta) \subset (\alpha)$.■

Cách 2 : Thay $x = 4 - t,\ y = -2\ ,\ z = 1 + 2t$ vào phương trình mp(α) ta có $4(4 - t) + 7(-2).+ 2(1 + 2t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$. Đẳng thức đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $(\Delta) \subset (\alpha)$.■

c) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(-3;\ 1;\ -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;\ -5;\ 1)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;\ 1;\ 1)$. Ta có :

- $\vec{u}.\vec{n} = 2.3 - 5.1 - 1.1 = 0$.
- Thay toạ độ điểm M vào phương trình mp(α) có $3(-3) + 1 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow -4 = 0$ (!), mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ $M \notin (\alpha)$.

Vậy nên $(\Delta) \mathbin{//} (\alpha)$.■

Bài toán 6. Xác định điểm rơi trên đường thẳng

Kỹ thuật 13. Xác định hình chiếu vuông góc của một điểm trên một đường thẳng

Bài toán tìm hình chiếu M' của điểm M trên đường thẳng (Δ) có hai cách trình bày lời giải như sau :

Cách 1 : Lấy điểm $M' \in (\Delta)$, M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$'

Cách 2 :

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng (Δ)

Bước 2: Tìm giao điểm $M' = (\Delta) \cap (\alpha)$. Khi đó M' là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ).

Thí dụ 28$^{(P)}$. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

a) $M(2;\ 2;\ 1)$, (Δ) . $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 6 + t \end{cases}$.

b) $M(1;\ 0;\ 2)$, $(\Delta) : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$

Lời giải

a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (2;\ -3;\ 1)$.

Lấy $M'(2 + 2t;\ -1 - 3t;\ 6 + t)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ).

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2t;\ -3t - 3;\ t + 5)$

- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \quad \Leftrightarrow 2.2t + 3(3t + 3) + (t + 5) = 0$

$\Leftrightarrow 14(t + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1.$

Với $t = -1$ thì $M' = (0; 2; 5)$. Đó là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ).

b) Đặt $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ (1)

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (1; 2; -1)$

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng (Δ) $\Leftrightarrow$ (α) nhận $\vec{u} = (1; 2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đi qua điểm $M(1; -1; 2)$, mp(α) có phương trình

$1.(x - 1) + 2(y + 1) - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 3 = 0$ (2)

Lấy $M'(t - 2; 3 + 2t; 1 - 2t)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Thế toạ độ của M' vào (2) ta có $(t - 2) + 2(3 + 2t) - (1 - 2t) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$

Với $t = -1$ có $M' = (-1; 5; -1)$.

Đó là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ).

Lời nhắn: Các bạn liên hệ với bài tập 5.24.

Kỹ thuật 14. Xác định điểm đối xứng của một điểm qua một đường thẳng

Để tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua đường thẳng (Δ), bạn có thể tiến hành theo trình tự sau

Bước 1 : Tìm điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ).

Bước 2 : Xác định điểm M' sao cho I là trung điểm MM'.

Thí dụ 29$^{(P)}$ (*Xác định điểm đối xứng qua một đường thẳng*)

Tìm điểm đối xứng với điểm $M(1; -9; -5)$ qua đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

a) $M(1; -9; -5)$, (Δ) : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$;

b) $M(4; 1; 0)$, (Δ) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 \end{cases}$

Lời giải

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (2; 1; -1)$

Lấy $H(2 + 2t; -1 + t; -3 - t)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Ta có :

- $\overrightarrow{MH} = (2t + 1; t + 8; t - 3)$.
- H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi

$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\overrightarrow{MH} = 0 \quad \Leftrightarrow 2.(2t + 1) + 1.(t + 8) + (t + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 6t + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2.$

Với $t = -2$ có $H = (-2; -3; -1)$

- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi H là

trung điểm của MM' $\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = 2.(-2) \\ y' - 9 = 2.(-3) \\ z' - 5 = 2.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -5 \\ y' = 3 \\ z' = 3 \end{cases} \Rightarrow M' = (-5; 3; 3)$ ■

b) Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (1; 2; 0)$

Lấy $H(1 + t; 2t; 3)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Ta có :

- $\overrightarrow{MH} = (t - 3;\ 2t - 1;\ 3)$.
- H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi

$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow 1.(t - 3) + 2.(2t - 1) + 0.3 = 0 \Leftrightarrow 5t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Với $t = 1$ có $H = (2; 2; 3)$

- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi H là trung điểm của MM'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 4 = 2.2 \\ y' + 1 = 2.2 \\ z' = 2.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 3 \\ z' = 6 \end{cases} \Rightarrow M' = (0; 3; 6) \blacksquare$$

BÀI TẬP 6

6.1$^{(P)}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ), nếu :

1) $(\Delta) : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$; 2) $(\Delta) : \dfrac{x-4}{20} = \dfrac{y-11}{10} = \dfrac{z-64}{51}$.

6.2$^{(P)}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ), nếu :

1) $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$; 2) $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 4 - 13t \end{cases}$

6.3$^{(P)}$. Viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (Δ), nếu (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng :$(\alpha) : 2x + y - 2z + 1 = 0$ và $(\alpha') : x - y - 4z - 10 = 0$

6.4$^{(P)}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ trong mỗi trường hợp sau :

1) $M(3; 0; -1)$, $\vec{u} = (1; 2; -3)$; 2) $M(1; -2; 7)$, $\vec{u} = (5; -2; 6)$

6.5$^{(P)}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua điểm $M(-1; 5; 3)$ và vuông góc với mp $(\alpha) : 2x + y - z + 5 = 0$.

2) Đi qua điểm $M(-3; 2; 1)$ và song song với đường thẳng (Δ') :

$$\frac{x-30}{4} = \frac{5-y}{11} = \frac{z-75}{9}$$

6.6$^{(P)}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

1) Đi qua điểm $M(11; 9; 1)$, và vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -1)$, $\vec{u'} = (2; -1; 3)$

2) Đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$(\alpha) : 3x - 5y + 2z - 7 = 0$ và $(\alpha') : 2x + y + 9z + 18 = 0$

6.7$^{(P)}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B trong mỗi trường hợp sau

1) $A(1; 3; 8)$, $B(2; 5; 4)$; 2) $A(-3; 5; -7)$, $B(2; 5; 8)$.

6.8$^{(P)}$. Trong hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng (Δ), (Δ') lần lượt có phương trình

$$(\Delta) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4 - 2t, \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad (\Delta') : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

1) Chứng tỏ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau.

2) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng ấy.

3) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ').

6.9$^{(P)}$. Trong hệ trục *Oxyz* cho hai đường thẳng (Δ), (Δ') lần lượt có phương trình

$$(\Delta): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{3-z}{2}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

1) Chứng tỏ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau.
2) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng ấy.
3) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ').

6.10. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với hai đường thẳng (Δ) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \text{ và } (\Delta'): \begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 10 - t \end{cases}$$

6.11$^{(P)}$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(α).

$$(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}, \qquad (\alpha): 3x - y - 4 = 0.$$

a) Tìm giao điểm của (Δ) và mp(α).
b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(α)

6.12$^{(P)}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) trong mỗi một trường hợp sau :

a) $M = (3; 0; 1)$, (Δ) đi qua điểm $N(1; 0; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; \sqrt{3}, 1)$

b) $M = (4; 1; -1)$, (Δ) có phương trình $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 - \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases}$.

6.13$^{(P)}$. Tính khoảng cách từ đường thẳng $(\Delta): \dfrac{\sqrt{11} - x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{4}$ đến mặt phẳng (α) : $3x - y + z + 9 = 0$.

6.14$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

6.15$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') trong đó:

+ (Δ) có phương trình $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{2+y}{-2} = \dfrac{z+5}{1}$,

+ (Δ') là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 1 = 0$ và $(\alpha'): y - z - 2 = 0$

6.16$^{(P)}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 2 \\ z = 1 - 3t \end{cases}.$$

6.17$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') với :

$$(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{3-y}{1} = \frac{z+1}{2}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}.$$

6.18$^{(P)}$. Tính góc giữa trục Ox và đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = 1 \\ x = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

6.19$^{(P)}$. Tính góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ'), với :

$$(\Delta): \frac{x}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}, \qquad (\Delta'): \frac{x+4}{2} = \frac{y-12}{1} = \frac{2-z}{5}$$

6.20$^{(P)}$. Tính góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), với :

$$(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{7-y}{1} = \frac{z+3}{2}, \qquad (\alpha): x + y + z + 1 = 0.$$

6.21$^{(P)}$. Tính góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), với :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 7 + t \\ y = \sqrt{3} \\ z = 3 \end{cases}, \qquad (\alpha): \sqrt{3}x - y + 1 = 0$$

6.22$^{(P)}$. Tính góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) với :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = 2 \\ z = 3 - \sqrt{2}t \end{cases}; \qquad (\alpha): 2x - 2y - z = 0$$

6.23$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\Delta): \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{1}, \qquad (\Delta'): \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{2}$

b) $(\Delta): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+3}{2}, \qquad (\Delta'): \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$

6.24$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\Delta): \dfrac{x}{\log_2 9} = \dfrac{y}{\log_3 9} = \dfrac{z}{\log_4 9}, \qquad (\Delta'): \dfrac{x-1}{\log_2 3} = \dfrac{y-1}{\log_3 3} = \dfrac{z-1}{\log_4 3},$

b) $(\Delta): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{1}, \qquad (\Delta'): \begin{cases} x = 10 - 9t \\ y = -6 + 6t, \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

6.25$^{(P)}$. Xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau :

a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{7}, \qquad (\alpha): x + 8y - 4z + 15 = 0.$

b) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \\ z = 2 \end{cases}, \qquad (\alpha): 3x - 4y + z - 5 = 0.$

c) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{z-2}{2}, \qquad (\alpha): 3x + y - z + 2 = 0$

6.26$^{(P)}$. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

a) $M(1;-2;9)$, $(\Delta):\begin{cases}x=1+3t\\y=5+t\\z=2\end{cases}$.

a) $M(-6;-2;3)$, $(\Delta):\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$

6.27$^{(P)}$. Tìm điểm đối xứng với điểm M qua đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau :

a) $M(3;0;0)$, $(\Delta):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$;

b) $M(5;6;3)$, $(\Delta):\begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=4-2t\end{cases}$

6.28$^{(P)}$. Viết phương trình của đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): y+2z=0$ và cắt cả hai đường thẳng $(\Delta):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=4t\end{cases}$, $(\Delta'):\begin{cases}x=2+t\\y=4+2t\\z=1\end{cases}$,

6.29$^{(P)}$. Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0;1;2)$ và cắt cả hai đường thẳng $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$, $(\Delta'):\begin{cases}x=t\\y=7+3t\\z=2\end{cases}$

6.30. Cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(0;-6;2)$, $C(1;-1;4)$ và mp(α) : $x+y+z-1=0$. Tìm toạ độ điểm M trên (α) sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị bé nhất.

6.31. Cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(-2;5;0)$ và mp(α) : $2x-2y+z+3=0$. Tìm toạ độ điểm M trên (α) sao cho :

a) $MA+MB$ đạt giá trị bé nhất.

b) $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

6.32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1, cạnh bên SA vuông góc với mp$(ABCD)$ và $SA=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SD.

a) Tính khoảng cách từ A tới mp(BCM).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, CN.

c) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

d) Tính tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp $S.ABCD$ chia bởi mặt phẳng (BCM).

6.33. Trong không gian với hệ tục toạ độ $Oxyz$ cho bốn điểm : $A(2a;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $D(0;0;2a)$ và $B(2a;2a;0)$, $a>0$. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD.

1) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng OE với mặt phẳng (ACD)

2) Tính thể tích hình chóp $D.OABC$.

3) Tìm toạ độ diểm O' đối xứng với điểm O qua đường thẳng BD.

6.34. Trong không gian với hệ tục toạ độ Đề các vuông góc cho ba điểm $A(2;0;1)$, $B(2;-1;0)$, $C(1;0;1)$ và đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$

1) Tìm trên đường thẳng (Δ) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

2) Tính thể tích hình chóp $OABC$. (*CĐSPHN* năm học 2001 – 2002)

6.35. Trong không gian với hệ tục toạ độ $Oxyz$ cho bốn điểm : $A(1;2;2)$, $B(-1;2;-1)$, $C(1;6;-1)$, $D(-1;6;2)$.

1) Chứng minh $ABCD$ là hình tứ diện và có cặp cạnh đối vuông góc với nhau.
2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.
3) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

(Đại học Thái Nguyên, khối A, B, T năm học 2001–2002)

Bài tập trắc nghiệm

66.1$^{(P)}$. Cho đường thẳng (Δ) có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Phương trình nào sau đây cũng là phương trình của đường thẳng (Δ)

A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$; B. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$

C. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{2}$; D. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$

66.2$^{(P)}$. Cho mặt phẳng$(\alpha) : x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$

Toạ độ giao điểm của (Δ) và (α) là

A. (0; 2; 2); B. (2; 1; 1) C. (2; 0; 1); D. (1; 2; 0)

66.3$^{(P)}$. Toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 0; -1)$ trên đường thẳng (Δ):

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ là}$$

A. (1; 1; 1); B. (2; 2; 2) C. (2; 0; 1); D. (1; 1; 0)

66.4. Khoảng cách từ điểm $M(1; 0; 0)$ đến đường thẳng $(\Delta) : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ là

A. $\sqrt{2}$; B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; C. 3; D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

66.5$^{(P)}$. Một lời giải tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$(\Delta) : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{và } (\Delta') : \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-1}{-10}$$

trình bày như sau :

- *Bước* 1 : Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(-2; 2; -1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -2)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(2; 3; 1)$và có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (5; 10; -10)$. Do vậy khoảng cách giữa (Δ) và (Δ') bằng khoảng cách từ điểm M' đến đường thẳng (Δ).
- *Bước* 2 : Ta có $|\vec{u}| = 3$, $\overrightarrow{MM'} = (-4; -1; 1)$,

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4; 5; 7),$$

$$|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 7^2} = 3\sqrt{10}$$

- *Bước* 3 : Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) bằng

$$\frac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u}|} = \frac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}.$$

Lời giải trên có bước nào chưa hoàn toàn chính xác? Nếu có thì sự thiếu chính xác xảy ra ở bước nào?

A. Hoàn toàn chính xác; B. Bước 1;

C. Bước 2; D. Bước 3

66.6. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \text{ và } (\Delta') : \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1} \text{ là}$$

A. cắt nhau; B.song song; C. chéo nhau; D. trùng nhau.

66.7. Cho điểm $M(2; -1; 1)$ và hai đường thẳng $(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $(\Delta') : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$

Đường thẳng đi qua M và vuông góc với cả hai đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình là :

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$; B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$; D. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$

66.8. Cho hai điểm $A(2; 4; -1)$, $B(5; 0; 7)$. Phương trình đoạn.thẳng AB là

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ với $0 \le t \le 1$, B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$ với $0 \le t \le 1$

C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ với $0 \le t \le 1$, D. $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 4 - 9t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ với $0 \le t \le 1$

66.9. Góc giữa hai đường thẳng $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $(\Delta') : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}$ bằng :

A. 60^0; B. 45^0; C. 30^0; D.90^0;

66.10. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng $(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$

trên mặt phẳng (Oxy) là :

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$, B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$, D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

BÀI TẬP 1

Khối lăng trụ

1.1 (h.64). **1)** Ta có $V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}AB.BC.AA_1 = \frac{1}{2}a.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

2) Gọi N là trung điểm B_1B, H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (AMN). Ta có

$BN = \frac{B_1B}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $BM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

và $B_1C \,//\, MN \Rightarrow B_1C \,//\, (AMN)$

Vì thế $d(AM, B_1C) = d(B_1, (AMN))$ (1)

Do N là trung điểm BB_1 nên

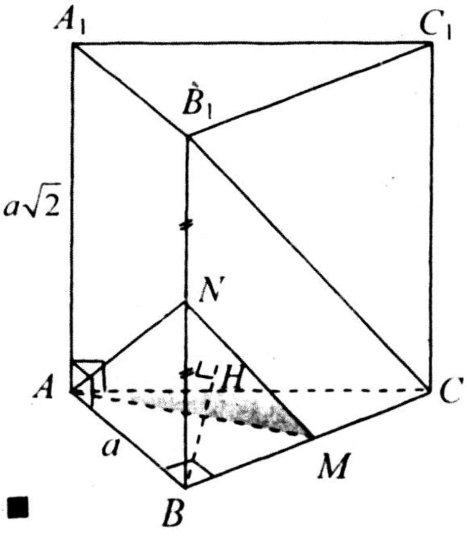
$d(B_1, (AMN)) = d(B, (AMN))$

$= d(H, (AMN))$ (2)

Trong tứ diện $BAMN$ có ba mặt vuông tại B ta có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2}\frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{7}{a^2}$$

$\Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$.·Từ (1), (2), (3) ta có $d(AM, B_1C) = \frac{a}{\sqrt{7}}$ ■

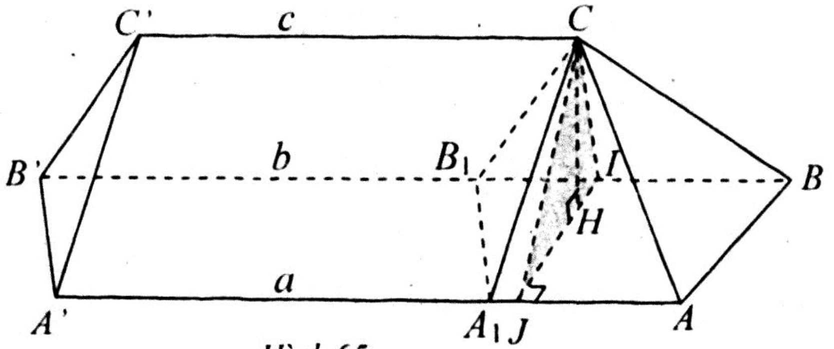


Hình 64

Lời nhắn: Các bạn xem lại "cách điểm" được trình bày ở *Bài toán* 9 : *Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*, trong cuốn "*Bồi dưỡng Hình học* 11" của cùng tác giả với cuốn tài liệu này. Theo đó : B_1 là "*cách điểm*", B là "*điểm thế cách*". Một lần nữa các bạn thấy sự tế nhị của "*cách điểm*" và "*điểm thế cách*".

1.2. *Lời giải.* (h.65)

Giả sử $a \geq b \geq c$. Từ C vẽ mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) cắt AA', BB' theo thứ tự tại A_1, B_1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên $(AA'B'B)$. Trong mặt phẳng $(AA'B'B)$, qua H kẻ $MN \perp A'A$. Ta có



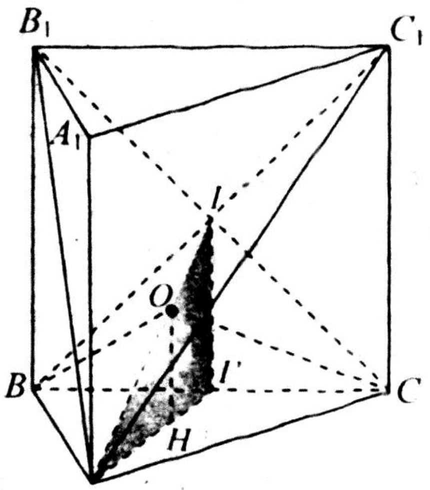
Hình 65

- $V_{ABCA'B'C'} = V_{ABCA_1B_1C_1} + V_{C.ABB_1A_1}$ (1)
- $V_{A'B'C'A_1B_1C_1} = 3V_{C.A'B'B_1A_1} = \frac{1}{2}c.IJ.CH = c.s_{\Delta CIJ}$. (2)
- $V_{C.ABB_1A_1} = \frac{1}{3}.s_{A_1B_1BA}.SH = \frac{1}{3}.\frac{A_1A + B_1B}{2}.IJ.SH = \frac{(a-c)+(b-c)}{3}.s_{\Delta CIJ}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta có $V_{ABCA'B'C'} = \frac{a+b+c}{3}.s_{\Delta CIJ}$ ■

1.3.(h.66) 1) Gọi $I = (AC_1) \cap (B_1C)$ nên $I = (ABC_1) \cap (AB_1C) \Rightarrow AI$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC_1) và (AB_1C) suy ra $O \in AI$.

Gọi I' là trung điểm BC. Dễ thấy I' là hình chiếu vuông góc của I trên $(ABC) \Rightarrow H \in AI'$.
Lý luận tương tự H thuộc trung tuyến kẻ từ B của ΔABC. Vậy H là trọng tâm tam giác ABC.



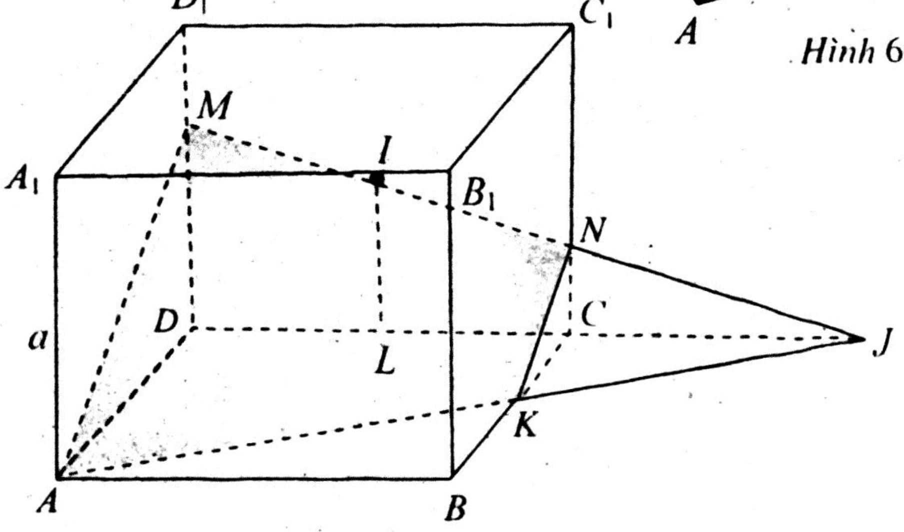
Hình 66

2) Dễ thấy $OH = \frac{2}{3} II' = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} C_1C = \frac{1}{3} C_1C$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} OH.s_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}. C_1C.s_{\Delta ABC}$$

Hay $V_{OABC} = \frac{1}{3} V_{C_1ABC} = \frac{1}{9} V_{ABCA_1B_1C_1}$ ■

1.4. (h.67)



Hình 67

1) Kéo dài AK cắt CD tại J. Kẻ đường thẳng IJ cắt C_1C tại N, cắt D_1D tại M.
Thiết diện là hình thang $AMNK$.■

2) Gọi V là thể tích phần của hình hộp, V_1 là thể tích phần của hình hộp có chứa đỉnh C do thiết diện trên chia ra. Gọi L là trung điểm CD. Ta có $IL \parallel MD \parallel NK$. Khi đó

$$\frac{JA}{JK} = \frac{JD}{JC} = \frac{JM}{JN} = \frac{DA}{CK} = 2 \Rightarrow \frac{JI}{JN} = \frac{JL}{JC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{JM}{JN} = \frac{4}{3}$$

Từ đây có $CJ = a$, $CN = \frac{2}{3} IL = \frac{a}{3}$, $V_{JCNK} = \frac{1}{6} CJ.CK.CN = \frac{1}{6}.a.\frac{a}{2}.\frac{a}{3} = \frac{a^3}{36}$

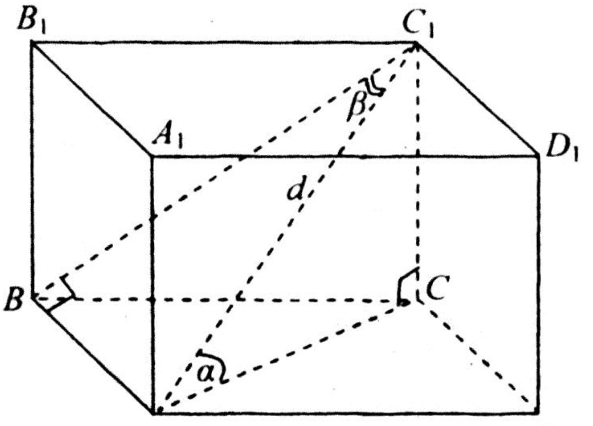
Bởi vậy $\frac{V_{JAND}}{V_{JKNC}} = \frac{JA}{JK}.\frac{JD}{JC}.\frac{JM}{JN} = 2.2.2 = 8 \Rightarrow \frac{V_{JAND} - V_{JKNC}}{V_{JKNC}} = \frac{8-1}{1} = 7$

$$\Leftrightarrow \frac{V_1}{V_{JKNC}} = 7 \Rightarrow V_1 = 7V_{JKNC} = 7.\frac{a^3}{36} = \frac{7a^3}{36}$$

Thể tích phần còn lại là $V_2 = V - V_1 = a^3 - \frac{7a^3}{36} = \frac{29a^3}{36}$ ■

1.5.1) Bạn đọc tự giải.

2) (h.68) Trong ΔACC_1 ($\widehat{C} = 90^0, \widehat{A} = \alpha$)
Ta có $AC_1 = A_1C = d$, $C_1C = d\sin\alpha$
$AC = d\cos\alpha$.



Hình 68

Trong ΔABC_1 ($\widehat{B} = 90^0, \widehat{C_1} = \beta$)

Ta có $AB = d\sin\beta$

Trong ΔABC vuông tại B có

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật là

$$V = AB.BC.CC_1$$

$$= d^3\sin\alpha.\sin\beta.\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \qquad (1)$$

3) Ta có $V^2 = d^3\sin^2\alpha.\sin^2\beta.(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)$

$$= d^6\sin^2\alpha.\sin^2\beta.(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)$$

$$\Rightarrow V^2 \le d^6\left(\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + (\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}{3}\right)^3 = \frac{d^6}{27} \Rightarrow V \le \frac{\sqrt{3}d^3}{9}$$

Dấu đẳng thức có khi $\sin^2\alpha = \sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha\\ \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha\\ 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = \alpha\\ \cot^2\alpha = 2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \text{arccot}\sqrt{2}$. Vậy $\max V = \dfrac{\sqrt{3}d^3}{9}$ ■

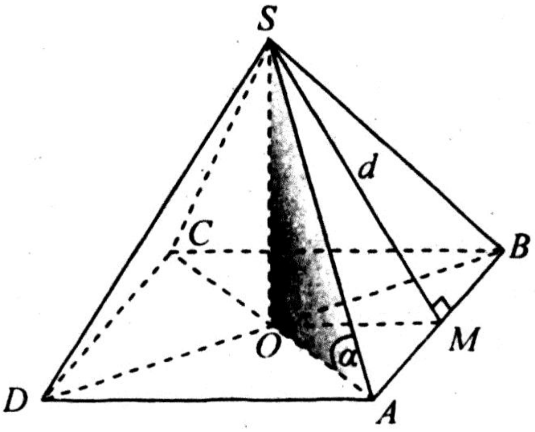
Khối chóp

1.6. *Hướng dẫn* : Tương tự Thí dụ 6 – Bài toán 3

1.7. (h.69). Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.Gọi cạnh đáy bằng a.

Gọi M là trung điểm AB. Ta có $OA = MA\sqrt{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Từ các tam giác vuông SOM và SOA ta có $SO^2 = SM^2 - OM^2 = (OA\tan\alpha)^2$



Hình 69

$$\Leftrightarrow\ d^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2\tan^2\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ a^2(1 + 2\tan^2\alpha) = 4d^2$$

$$\Rightarrow\ a = \frac{2d}{\sqrt{1 + 2\tan^2\alpha}} \text{ và}$$

vì vậy $SO = \dfrac{d\sqrt{2}\tan\alpha}{\sqrt{1 + 2\tan^2\alpha}}$.

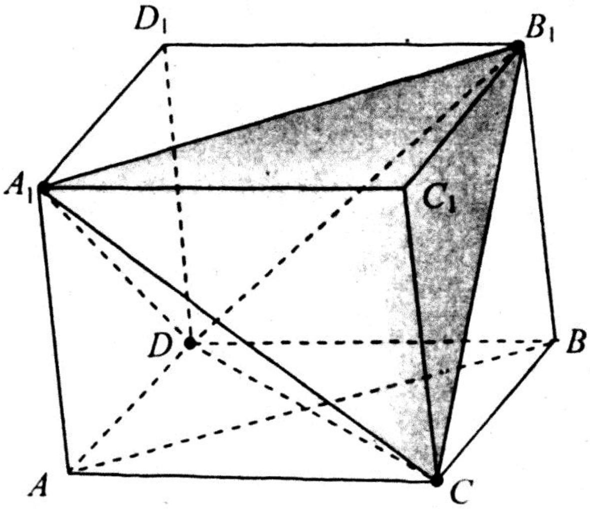
Cuối cùng $V = \dfrac{1}{3}s_{ABCD}.SO$

$$= \frac{1}{3}a^2.\frac{d\sqrt{2}\tan\alpha}{\sqrt{1 + 2\tan^2\alpha}} = \frac{1}{3}.\frac{4d^2\tan^2\alpha}{(1 + 2\tan^2\alpha)}.\frac{\sqrt{2}d\tan\alpha}{\sqrt{1 + 2\tan^2\alpha}}$$

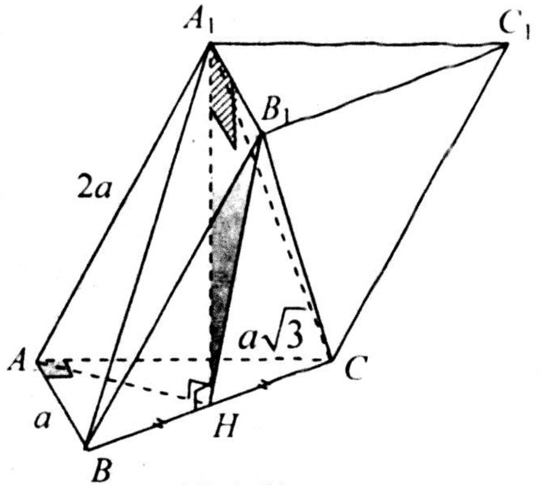
$$\Leftrightarrow V = \frac{4d^3\sqrt{2}\tan^3\alpha}{3\sqrt{(1 + 2\tan^2\alpha)^3}}$$ ■

1.8 (h.70) Ta có $V_{A_1ACD} = V_{B_1BCD} = V_{DD_1A_1B_1} = V_{CC_1A_1B_1} = \dfrac{V}{6}$

$$\Rightarrow V_{A_1B_1CD} = V - (V_{A_1ACD} + V_{B_1BCD} + V_{DD_1A_1B_1} + V_{CC_1A_1B_1}) = V - \frac{4V}{6} = \frac{V}{3}$$



Hình 70



Hình 71

1.9 (71) *(TSĐH, khối A – 2008):*

1) Gọi H là trung điểm BC. Theo giả thiết ta có $A_1H \perp (ABC)$.

Trong ΔABC vuông tại A có :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a\,,\ AH = \frac{1}{2}BC = a$$

Trong ΔA_1HA vuông tại H có : $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Thể tích khối chóp $A_1.ABC.V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.BC.A_1H = \dfrac{1}{6}a.a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{2}$.

2) Trong ΔA_1B_1H vuông tại A_1 có :

$$B_1H^2 = A_1H^2 + A_1B_1{}^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow B_1H = 2a$$

Trong ΔB_1BH ta có $B_1H^2 = B_1B^2 + BH^2 - 2B_1B.BH.\cos B$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 4a^2 + a^2 - 2.2a.a.\cos B \Leftrightarrow 4\cos B = 1 \Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{4}\ \blacksquare$$

1.10 (h.72) 1) Trong tam giác SAB ta có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2.SA.AB.\cos A$

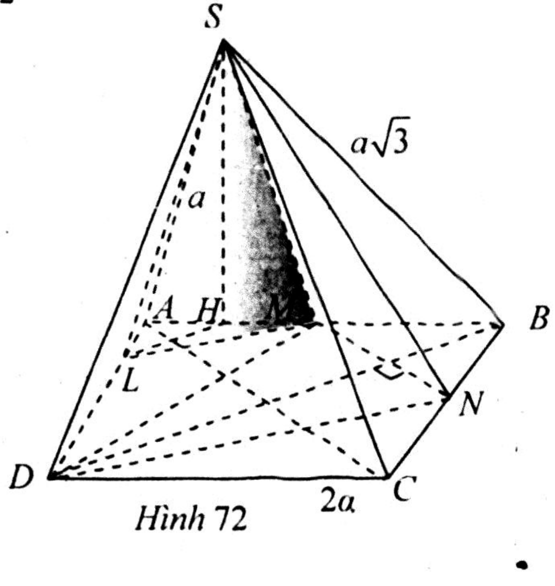
$$\Leftrightarrow 3a^2 = a^2 + 4a^2 - 2.a.2a.\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0.$$

Vậy SH là đường cao của tam giác đều SAM có cạnh bằng a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Ta có $AC = BD = 2a\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} MN \,//\, AC, MN = \dfrac{AC}{2} \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow MN \perp BD$$

$$\Rightarrow S_{BMDN} = \frac{1}{2}BD.MN = \frac{1}{2}.2a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = 2a^2.$$



Hình 72

Thể tích khối chóp $S.BMDN$ là $V=\frac{1}{3}s_{BMDN}.SH=\frac{1}{3}.2a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ ■

2) Trong tam giác vuông DCN ta có $DN=\sqrt{DC^2+CN^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}$

Lấy điểm $L\in AD$ sao cho $ML\,//\,BD$. Khi đó $(\widehat{SM,DN})=(\widehat{SM,ML})$

Trong hai tam giác vuông đồng dạng AML và CDN ta có

$$+\ \frac{ML}{DN}=\frac{AM}{CD}\Rightarrow ML=\frac{AM}{CD}.DN=\frac{a}{2a}.a\sqrt{5}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$+\ \frac{AL}{CN}=\frac{AM}{CD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AL}{AD}=\frac{AL}{CD}=\frac{1}{4}=\frac{AH}{AB}=\frac{AH}{AD}\Rightarrow AL=AH$$

$$\Rightarrow LH=\frac{AH\sqrt{2}}{4}=\frac{2a\sqrt{2}}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\qquad(1)$$

Trong tam giác SHL vuông tại H ta có $SL^2=SH^2+HL^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{2}=\frac{5a^2}{4}$ (2)

Trong tam giác SML ta có $SL^2=SM^2+ML^2-2SM.ML\cos M$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta có $\frac{5a^2}{2}=a^2+\frac{5a^2}{4}-2.a.\frac{a\sqrt{5}}{2}\cos M\Leftrightarrow\cos M=\frac{1}{\sqrt{5}}$

1.11(h.73). 1) Gọi O là tâm của đáy. Từ giả thiết $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp AB$.

Lấy M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Khi đó ta có O là trung điểm MN. Ta có $MN//AD\Rightarrow MN\perp AB$.

Kết hợp với $AB\perp SO\Rightarrow AB\perp(SMN)$ và $\widehat{SMN}=\alpha$.

Trong mặt phẳng (SMN) hạ $NK\perp SM$ suy ra $NK\perp(SAB)$.

Trong ΔMNK vuông tại K, $\widehat{SMN}=x$ ta có $MN=\frac{NK}{\sin x}=\frac{2a}{\sin x}$ Trong ΔSOM vuông tại O, $\widehat{SMO}=x$ ta có $SO=OM\tan x=\frac{a}{\sin x}\tan x=\frac{a}{\cos x}$

Cuối cùng $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}s_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}MN^2SO=\frac{1}{3}\frac{4a^2}{\sin^2x}.\frac{a}{\cos x}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{4a^3}{3\cos x\sin^2x}$ ■

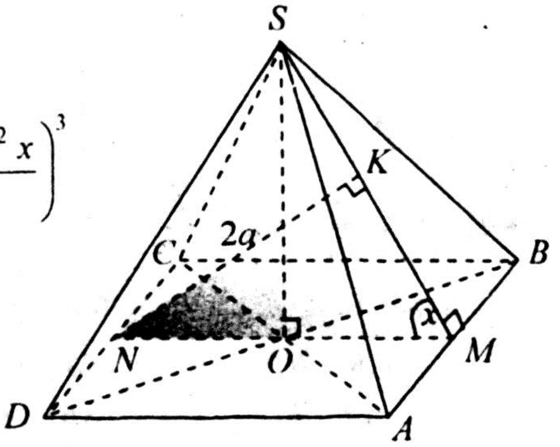
2) *Cách* 1: Do $x\in(0^0,90^0)$ nên $\cos x>0$.

Ta có $(\cos x\sin^2x)^2=\frac{1}{2}(2\cos^2x.\sin^2x.\sin^2x)$

$$\leq\frac{1}{2}.\left(\frac{2\cos^2x+\sin^2x+\sin^2x}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow(\cos x\sin^2x)^2\leq\frac{4}{27}\Rightarrow\cos x\sin^2x\leq\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{4a^3.3\sqrt{3}}{3.2}=2a^3\sqrt{3}$$



Hình 73

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $2\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan\sqrt{2}$

Vậy $\min V = 2a^3\sqrt{3}$.

Cách 2: Đặt $t = \cos x$, $t \in (0;\, 1)$. Khi đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{4a^3}{3t(1-t^2)}$.

V nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hàm số $f(t) = t(1-t^2) = t - t^3$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;\, 1)$.

Ta có $f'(t) = 1 - 3t^2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

t	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(t)$	0		+	0	–	
$f(t)$			↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	

Vậy $\max f(t) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ suy ra $\min V = 2a^3\sqrt{3}$

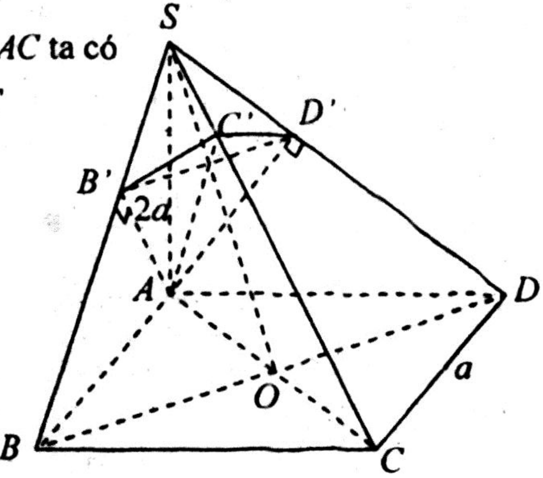
1.12 (h.74). Ta có $\begin{cases} AB' \perp SB \\ AB' \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp (SAC) \Rightarrow AB' \perp SC$ (1)

Tương tự $AD' \perp SC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$.

Do tính đối xứng nên ta có $V_{.S.AB'C'D'} = 2V_{.S.AB'C'}$

Ta có $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$ (3)



Hình 74

- Trong các tam giác vuông tại A gồm SAB và SAC ta có

$SA^2 = SB'.SB = SC'.SC \Rightarrow SA^4 = SB'.SB.SC'.SC$

$\xRightarrow{\text{Chia cho } SB^2.SC^2} \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^4}{SB^2.SC^2}$

$= \dfrac{SA^4}{(SA^2 + AB^2)(SA^2 + AC^2)}$

$= \dfrac{16a^4}{5a^2.6a^2} = \dfrac{8}{15}$ (4)

- $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}a.a.2a = \dfrac{a^3}{3}$ (5)

Nhân theo từng vế các đẳng thức (3), (4), (5) ta có

$\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}V_{S.AB'C'} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{8}{15}.\dfrac{a^3}{3} \Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{16a^3}{45}$ ■

1.13. (h.75)

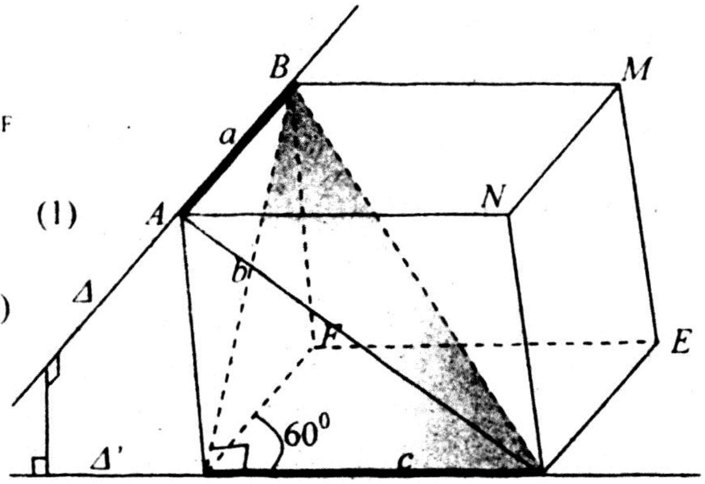
1) Dựng hình hộp *ABMN.CDEF*. Ta có

Cách 1 : $V_{ABCD} = \frac{1}{6}V_{ABMNCDF} = \frac{1}{6}h.s_{CDEF}$

$$= \frac{1}{6}hac\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{12}hac \quad (1)$$

Cách 2: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}h.AB.CD\sin(\widehat{AB,CD})$

$$= \frac{1}{6}hac\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{12}hac$$



Hình 75

2) Gọi *h'* là khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (*BCD*).

Ta có $V_{ABCD} = V_{A.BCD} = \frac{1}{3}h'.s_{\Delta BCD} = \frac{1}{6}h'bc \quad (2)$

So sánh (1) và (2) suy ra $\frac{\sqrt{3}}{12}hac = \frac{1}{6}h'bc \Rightarrow h' = \frac{ah}{2b}$ ■

Tỉ số thể tích

1.14 (h.76) Gọi *O* là trung điểm BD ⇒ *O* là tâm của đáy *ABCD* ⇒ $SO \perp (ABCD)$. Giả sử đường thẳng *MN* cắt *CD* và *BC* theo thứ tự tại *K* và *I*. Kí hiệu $AB = a$, $\widehat{BCD} = \alpha$. Kí hiệu V_1 là thể tích của phần của khối chóp *S.ABC* có chứa đỉnh *C* do mặt phẳng (*PIK*) chia ra, phần còn lại là V_2. Thể tích của khối chóp là *V*. Dễ thấy :

- $V_1 = V_{P.CIK} - (V_{I.BEM} + V_{K.DNF})$, $CK = CI = \frac{3a}{2}$.

Ta có $\frac{V_{I.BEM}}{V_{I.CPK}} = \frac{IB}{IC}.\frac{IE}{IP}.\frac{IM}{IK} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ (1)

Tương tự ta cũng có $\frac{V_{K.DNF}}{V_{KCIP}} = \frac{1}{18}$ hay $\frac{V_{K.DNF}}{V_{I.CPK}} = \frac{1}{18}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{V_{I.BEM} + V_{K.DNF}}{V_{I.CPK}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{V_{I.CPK} - (V_{I.BEM} + V_{K.DNF})}{V_{I.CPK}} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9}$

- Hay $\frac{V_1}{V_{I.CPK}} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9}$ (3)

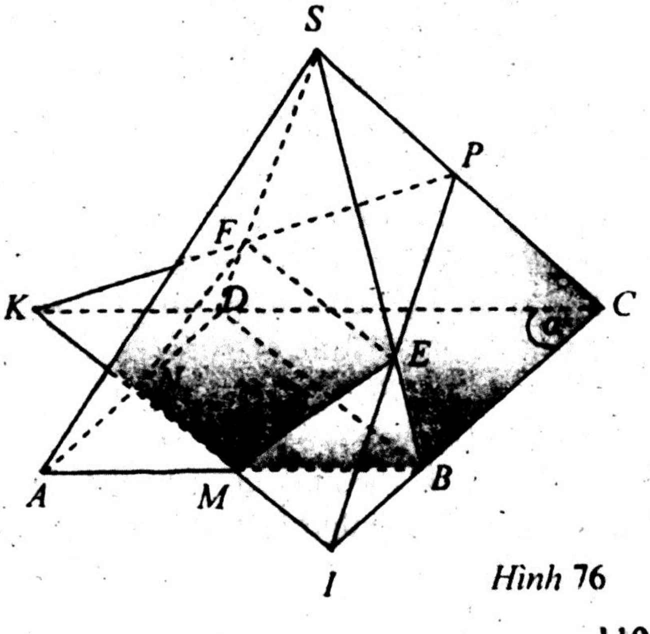
Kí hiệu d(*S*, (*ABC*)) = *h*. Ta có :

$d(P, (ABC)) = \frac{h}{2}$.

- $V_{P.CIK} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{1}{2}CI.IK.\sin\alpha$.

$$= \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}.\sin\alpha$$

$$= \frac{3a^2h}{16}.\sin\alpha \quad (4)$$



Hình 76

- $V_{S.ABCD} = \frac{a^2.h}{3}.\sin\alpha$ (5)
- Từ (1), (2) suy ra $\frac{V_{I.CPK}}{V} = \frac{9}{16}$ (6)

Nhân theo từng vế các đẳng thức (3) và (6) ta có

$\frac{V_{I.CPK}}{V}.\frac{V_1}{V_{I.CPK}} = \frac{9}{16}.\frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1} = 1$ ■

1.15. (h.77). **1)** Dễ thấy $BD \perp SC$, theo giả thiết $(\alpha) \perp SC$

$\Rightarrow BD \ // (\alpha) \Rightarrow BD \ // \ B'D'$

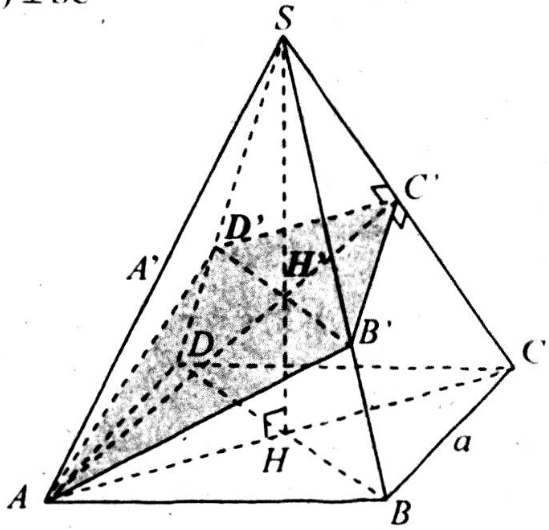
$\Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SH} = \frac{2}{3}$

Dễ thấy H' là trọng tâm ΔSAC

$\Rightarrow C'$ là trung điểm $SC \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$

Ta có $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}}$

$= \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. (1)



Hình 77

2) Thấy rằng ΔSAC có H vừa là trực tâm vừa là trọng tâm nên nó là tam giác đều. Bởi thế $SH = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $V = \frac{1}{3}s_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Từ (1) suy ra $V_{S.AB'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$ ■

1.16. (h.78 Gọi giao điểm của mặt phẳng (α) với SC với SA, SB, SC, SD

Theo thứ tự là A', B', C', D'.

Ta có $AC' \perp SC$ (1)

Gọi K là trung điểm của SC'.

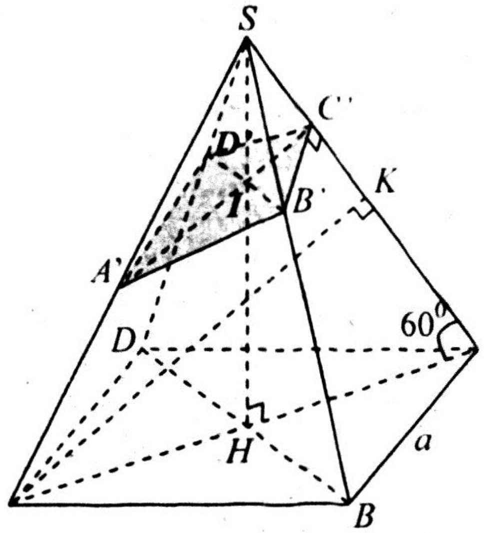
Từ giả thiết suy ra ΔSAC là tam giác đều nên $AK \perp SC$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow A'C' \ // \ AC$.

Do $BD \perp SC$ nên $BD//(\alpha) \Rightarrow B'D'//BD$

Từ các kết quả trên kết hợp với $2SI = IH$ suy ra

$\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SH} = \frac{1}{3}, \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{4}, \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{2}$



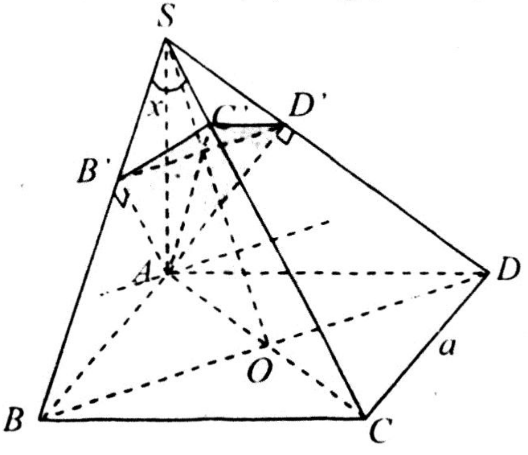
Hình 78

Gọi V, V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích các khối chóp $S.ABCD$, $S.A'B'C'D'$, phần của khối chóp nằm giữa thiết diện và đáy.

Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{2V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{24 - 1}$ hay $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{23}$ ■

1.17 (h.79). **1)** Rõ ràng AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên mặt phẳng $(ABCD)$



Hình 79

Từ giả thiết có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp AB'$. (1)

Do $(\alpha) \perp SC \Rightarrow AB' \perp SC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AB' \perp (SBC)$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB' \perp B'C' \\ AB' \perp B'C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{AB'C'} = 90^0 & (3) \\ \widehat{AB'C} = 90^0 & (4) \end{cases}$$

Tương tự $\begin{cases} \widehat{AD'C'} = 90^0 & (5) \\ \widehat{AD'C} = 90^0 & (6) \end{cases}$

Từ (3), (5) suy ra tứ giác $AB'C'D'$ có hai góc đối diện vuông là $\widehat{AB'C'}$ và $\widehat{AD'C'}$. ■

2) Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và $(\Delta) \perp SC$. Cố nhiên (Δ) cố định và $(\Delta) \in (\alpha)$. Điều ấy chứng tỏ khi khi S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A thì mặt phẳng (α) luôn đi qua một đường thẳng cố định (Δ) nói trên.

- Từ các kết quả trên thấy rằng : 5 điểm A, B, B', C', D' đều là đỉnh của các tam giác vuông cùng cạnh huyền AC nên có $OB = OB = OC' = OD' = OD = \frac{AC}{2}$ (const). (đpcm)

3) • Ta có $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ (7)

- Trong các tam giác vuông tại A gồm SAB và SAC ta có

$$SA^2 = SB'.SB = SC'.SC \Rightarrow SA^4 = SB'.SB.SC'.SC$$

$\overset{\text{Chia cho } SB^2.SC^2}{\Rightarrow} \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{SA^4}{SB^2.SC^2}$ (8)

- Khi $AB = BC$, hình chữ nhật $ABCD$ trở thành hình vuông . Giả sử $AB = a$.

- Trong các tam giác SBC vuông tại B có $SB = a\cot x$, $SC = \frac{a}{\sin x}$

- Trong các tam giác SAB vuông tại A có

$$SA^2 = SB^2 - AB^2 = (a\cot x)^2 - a^2 = a^2(\cot^2 x - 1) = \frac{a\cos 2x}{\sin^2 x}$$

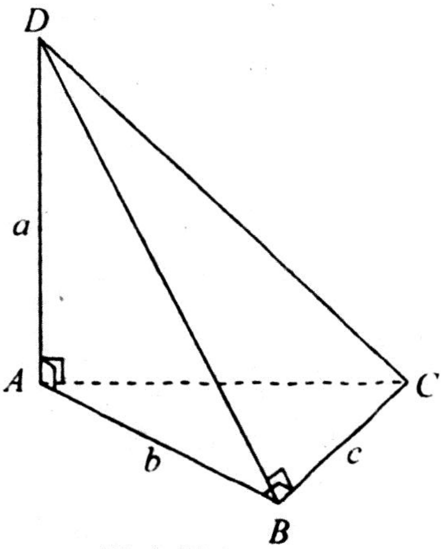
Vậy $\frac{SA^4}{SB^2.SC^2} = \frac{a^4\cos^2 2x}{\sin^4 x}.\frac{1}{a^2\cot^2 x}.\frac{\sin^2 x}{a^2} = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$ (9)

Từ (7), (8), (9) ta có $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$ ■

Phương pháp thể tích

1.18. (h.80) Gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

Dễ thấy $DB \perp BC$ nên ΔBCD có diện tích là $s_{ABCD} = \dfrac{DB.BC}{2} = \dfrac{c}{2}\sqrt{a^2+b^2}$



Hình 80

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}h.s_{BCD}$$

$$= \frac{1}{3}h.\frac{c}{2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{6}h.c.\sqrt{a^2+b^2} \quad (1)$$

Mặt khác $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}DA.AB.BC = \dfrac{1}{6}abc$ (2)

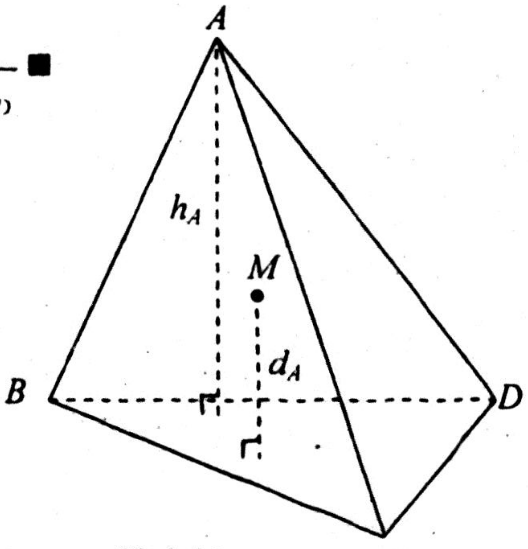
Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{1}{6}h.c.\sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{1}{6}abc$

$$\Leftrightarrow h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \blacksquare$$

1.19. *Hướng dẫn* : Xem lời giải bài 1.20, tự trình bày lời giải.

Theo bài 1.20 khi $d_A = d_B = d_C = d_D = r$ ta có

$$\frac{r}{h_A}+\frac{r}{h_B}+\frac{r}{h_C}+\frac{r}{h_D}=1 \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D} \blacksquare$$



Hình 81

1.20. (h.81) Gọi V, V_A, V_B, V_C, V_D theo thứ tự là thể tích của các tứ diện *ABCD*, *MBCD*, *MCDA*, *MABD*, *MABC*. Rõ ràng

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D$$

Ta có $\dfrac{V_A}{V} = \dfrac{3V_A}{3V} = \dfrac{s_{BCD}.d_A}{s_{BCD}.h_A} \Leftrightarrow \dfrac{d_A}{h_A} = \dfrac{V_A}{V}$.

Tương tự $\dfrac{d_B}{h_B} = \dfrac{V_B}{V}, \dfrac{d_C}{h_C} = \dfrac{V_C}{V}, \dfrac{d_D}{h_D} = \dfrac{V_D}{V}$.

$$\Rightarrow \frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}+\frac{d_C}{h_C}+\frac{d_D}{h_D} = \frac{V_A}{V}+\frac{V_B}{V}+\frac{V_C}{V}+\frac{V_D}{V}$$

$$= \frac{V_A+V_B+V_C+V_D}{V} = 1$$

Tóm lại $\dfrac{d_A}{h_A}+\dfrac{d_B}{h_B}+\dfrac{d_C}{h_C}+\dfrac{d_D}{h_D} = 1 \blacksquare$

1.21. (h. 82) Gọi V là thể tích khối chóp *S.ABCD*

Dễ thấy $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \dfrac{V}{2}$.

Để giản tiện cách viết ta kí hiệu : $\dfrac{SA'}{SA} = a, \dfrac{SB'}{SB} = b, \dfrac{SC'}{SC} = c, \dfrac{SD'}{SD} = d$.

Ta có $\dfrac{V_{SA'B'C'D'}}{V} = \dfrac{V_{SA'B'D'}+V_{SB'C'D'}}{V} = \dfrac{V_{SA'B'D'}}{V} + \dfrac{V_{SB'C'D'}}{V} = \dfrac{2V_{SA'B'D'}}{V} = abd$

Tương tự $\dfrac{V_{SB'C'D'}}{V_{BCD}} = \dfrac{2V_{SB'C'D'}}{V} = cbd$

$$\Rightarrow \frac{2V_{SA'C'D'}}{V} + \frac{2V_{SB'C'D'}}{V} = abd + cbd$$

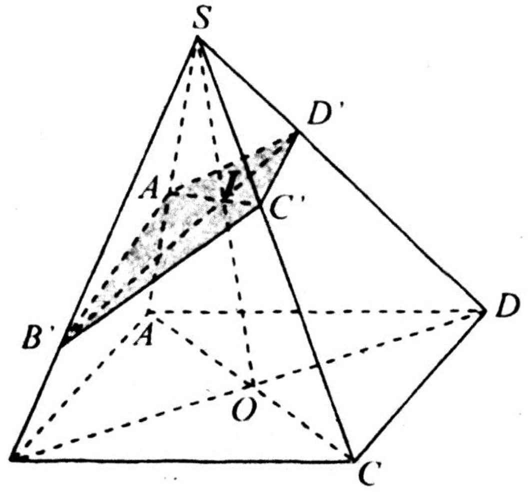
$$\Leftrightarrow \frac{2V_{A'B'C'D'}}{V} = bd(a + c) \qquad (1)$$

Ta cũng có $\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V} = \frac{V_{SA'B'C'}}{V} + \frac{V_{SA'C'D'}}{V}$

$$\Rightarrow \frac{2V_{A'B'C'D'}}{V} = ac(b + d) \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) có $bd(a + c) = ac(b + d)$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+c)}{ac} = \frac{(b+d)}{bd}$$



Hình 82

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \blacksquare$$

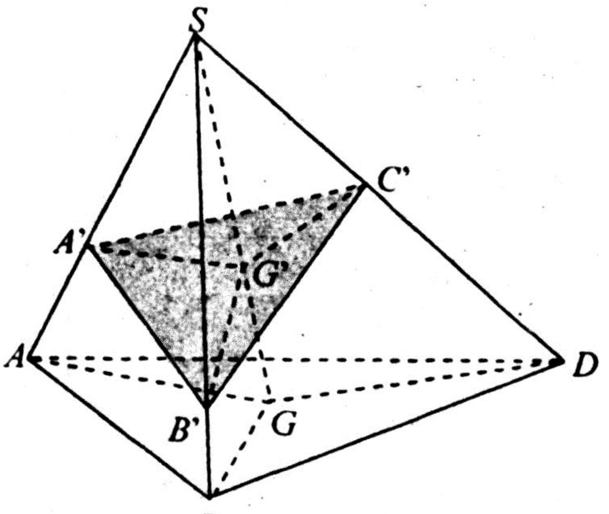
1.22 (h.83) Để giản tiện cách viết ta kí hiệu : thể tích khối chóp *S.ABC* là *V*,

$$\frac{SA'}{SA} = a, \frac{SB'}{SB} = b, \frac{SC'}{SC} = c, \frac{SG'}{SG} = g.$$

Dễ thấy $s_{\Delta GBC} = s_{\Delta GBC} = s_{\Delta GBC} = \frac{1}{3} s_{\Delta ABC}$.

$$\Rightarrow V_{S.GBC} = V_{S.GBC} = V_{S.GBC} = \frac{V}{3}$$

Ta có $\frac{V_{SG'A'B'}}{V_{SGAB}} = \frac{3V_{SG'A'B'}}{V} = gab$



Hình 83

Tương tự $\frac{3V_{SG'B'C'}}{V} = gbc$, $\frac{3V_{SG'C'A'}}{V} = gca$

Suy ra $\frac{3V_{SG'A'B'}}{V} + \frac{3V_{SG'B'C}}{V} + \frac{3V_{SG'C'A'}}{V} = gab + gbc + gca$

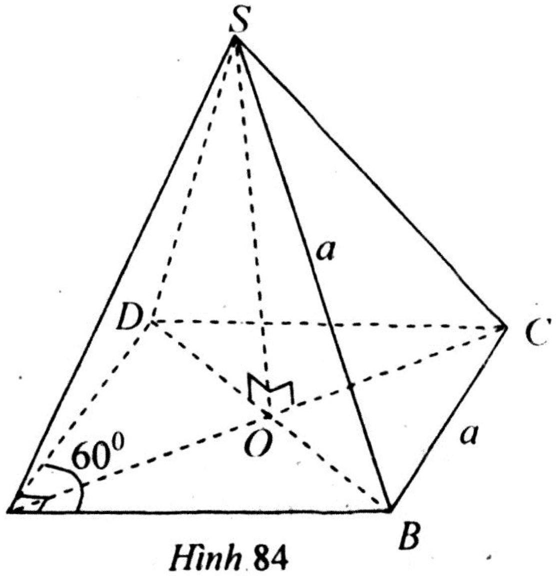
$$\Leftrightarrow \frac{3(V_{SG'A'B'} + V_{SG'B'C} + V_{SG'C'A'})}{V} = g(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3V_{SA'B'C'}}{V} = g(ab + bc + ca) \qquad (1)$$

Mặt khác $\frac{3V_{SA'B'C'}}{V} = 3abc \qquad (2)$

So sánh (1), (2) suy ra $g(ab + bc + ca) = 3abc \Leftrightarrow \frac{(ab + bc + ca)}{abc} = \frac{3}{g}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{g} \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'} \blacksquare$$



Hình 84

11.1.*Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.84)

Gọi h, S, S' theo thứ tự là đường cao hình chóp, diện tích đáy diện tích tam giác BAD. Từ giả thiết suy ra ΔSBD và ΔBAD là hai tam giác đều có cạnh bằng a, suy ra $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

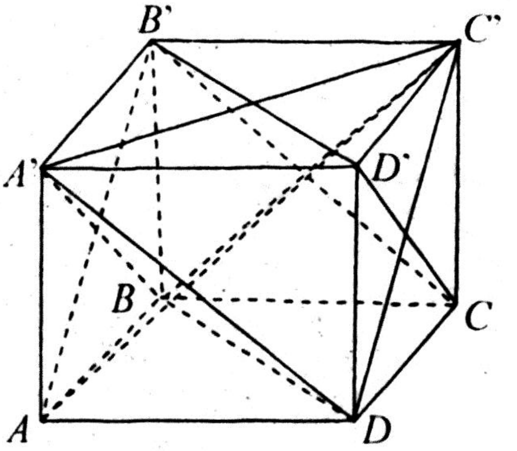
$$S = 2S' = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Theo giả thiết suy ra SO là đường cao của hình chóp. Bởi thế nên thể tích của hình chóp là

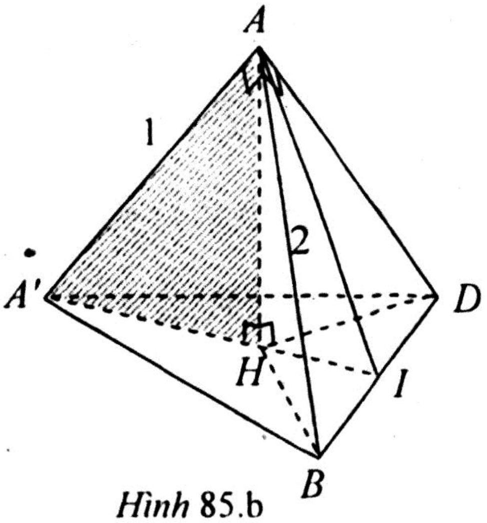
$$V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.\text{ Vậy } V = \frac{a^3}{4}\ ■$$

11.2. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.85a, h.85b)



Hình 85.a



Hình 85.b

Gọi H là trực tâm $\Delta A'BD$. Kéo dài $A'H$ cắt BD tại I. Theo giả thiết $AA' \perp AB$, $AA' \perp AD$ nên suy ra $AA' \perp (ABD)$. Cũng từ đó có $AA' \perp AI$. (1)

Do H là trực tâm suy ra $AI \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp (A'AH) \Leftrightarrow BC \perp AH$. Tương tự $A'B \perp AH$. Từ đó suy ra $AH \perp (A'BC)$ hay AH là đường cao của tứ diện vuông $AA'BD$. (h.11b)

Trong tam giác $A'AI$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AI^2}$ (3)

Trong tam giác BAD vuông tại A có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$ (4)

Cộng theo từng vế (3) và (4) có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{7^2}{6^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{6}{7}.■$$

11.3. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

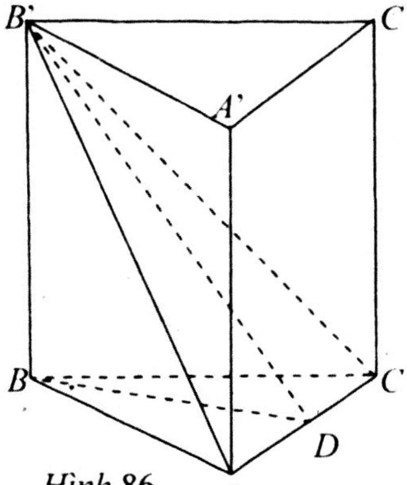
Lời giải tự luận. (h.86)

Gọi V, V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tứ diện $B'ABC$, $B'BAD$. Đường trung tuyến BD chia đôi diện tích ΔABC, từ đó mà suy ra $2V_2 = V_1$.

Lại biết rằng $V = 3V_1$ ($s_{ABC}.B'H$, trong đó $B'H \perp (ABC)$).

Do vậy $V = 3V_1 = 3(2V_2) = 6V_2$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{1}{6} \blacksquare$$



Hình 86

11.4. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.87)

Trong tam giác ABC vuông tại B có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (3a)^2 + (4a)^2$

$\Rightarrow AC = 5a$.

Rõ ràng AB là hình chiếu vuông góc của DB trên mp(ABC). Do $BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp DB$.

Trong tam giác ABD vuông tại A có

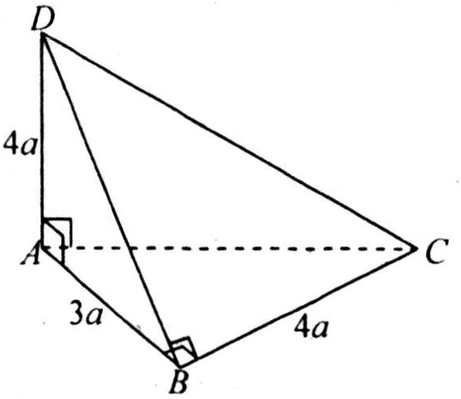
$AC^2 = AB^2 + AD^2 = (3a)^2 + (4a)^2$

$\Rightarrow AD = 5a$.

Từ các điều trên suy ra $\Delta ABC = \Delta ABD$, $\Delta DBC = \Delta DAC$. Do vậy diện tích toàn phần của tứ diện là :

$S = 2(s_{\Delta DAB} + s_{\Delta DAB})$

$= DA(AB + AC) = 4a(3a + 5a) = 32a^2. \blacksquare$



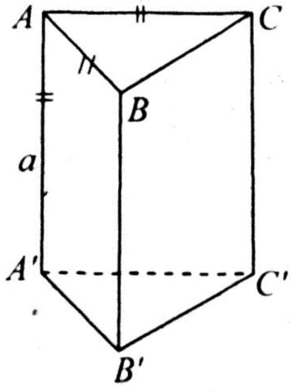
Hình 87

11.5. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận (h.88)

Thể tích của lăng trụ đứng $CBB'A'$ là

$$V = \frac{1}{3} s_{\Delta ABC}.A'A = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} AB.AC.AA' = \frac{a^3}{6} \blacksquare$$



Hình 88

11.6. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.89). Gọi I là trung điểm BC, A là trọng tâm ΔBCD.

Ta có $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $BA' = \dfrac{2}{3} BI = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$,

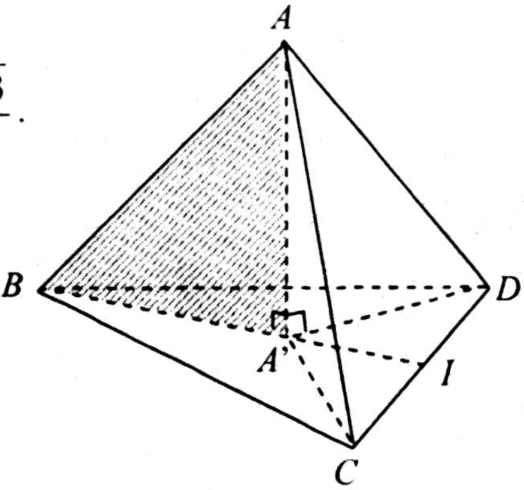
diện tích tam giác BCD là $S = \dfrac{1}{2} CD.AI = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác ABA' vuông tại A' ta có

$$A'A = \sqrt{AB^2 - A'B^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Thể tích tứ diện là :

$$V_x = \frac{1}{3} s_{\Delta ABC}.A'A = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \blacksquare$$



Hình 89

Lời bình: Ngoài các công thức, để giải nhanh các bài toán, bạn nên nhớ một số kết quả :

Đáng nhớ	Tam giác đều cạnh a	Tứ diện đều cạnh a
Đường cao	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,	$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
Diện tích	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = a^2\sqrt{3}$
Thể tích		$V = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}$

11.7. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận (h.90)

- Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

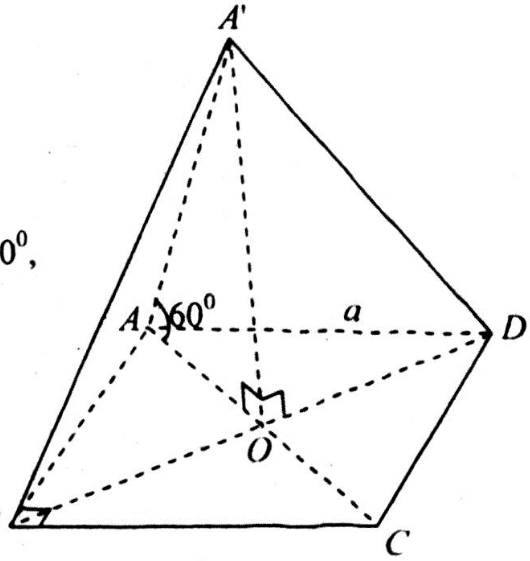
Từ giả thiết A' cách đều các đỉnh A, B, C ta suy ra hình chiếu của A' trên mặt phẳng $ABCD$ là O hay AO là đường cao của khối lăng trụ.

Trong tam giác $A'OA$ vuông tại O và $\widehat{A'AO} = 60^0$,

ta có $A'O = OA\tan 60^0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

- Diện tích đáy $ABCD$ là $s_{ABCD} = a^2$.
- Thể tích của khối lăng trụ là

$V = B.h = s_{ABCD}.AO = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. ■



Hình 90

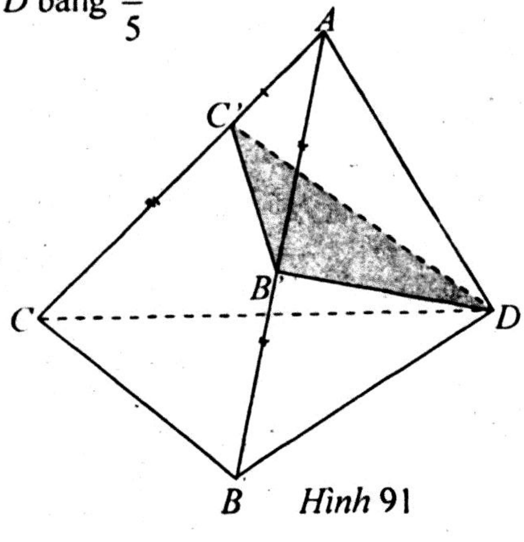
11.8. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận (h.91)

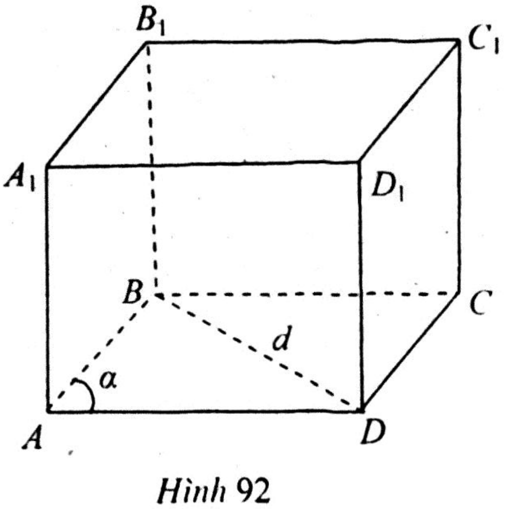
Gọi V, V' theo thứ tự là thể tích các khối $ABCD$, $AB'C'D$. Khi đó thể tích khối $BCB'C'D$ là $V - V'$. Theo giả thiết thì $\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{2}$

Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}.\frac{AD}{AD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{V'}{V-V'} = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa khối tứ diện $AB'C'D$ và phần còn lại của khối tứ diện diện $ABCD$ bằng $\frac{1}{5}$



Hình 91



Hình 92

11.9. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.92)

Gọi a, h theo thứ tự là cạnh đáy và chiều cao của hình hộp.

Giả sử $\widehat{BAD} = \alpha$, thế thì $BD = d$

Thể tích hình hộp là : $V = s_{ABCD}.h = a^2\sin\alpha.h = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.ah$ (1)

Diện tích mỗi mặt bên là $S = ah$ (2)

Trong tam giác ABD ta có : $BD^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.AD\cos\alpha$

$\Rightarrow d^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha = a^2 2(1 - \cos\alpha) = 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow d = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) có $V = d\cos\frac{\alpha}{2}.S = dS\cos\frac{\alpha}{2}$.■

11.10. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

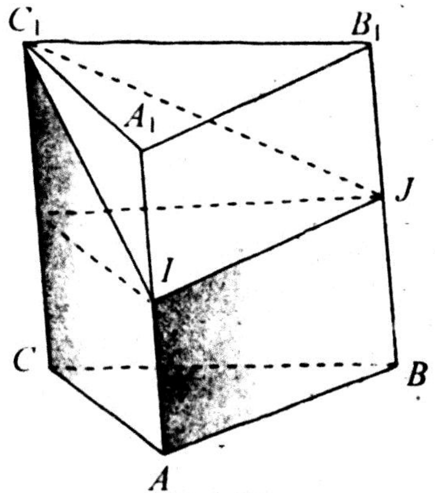
Lời giải tự luận (h.93)

Kí hiệu S, S_I theo thứ tự là hình bình hành ABB_1A_1, IJB_1A_1

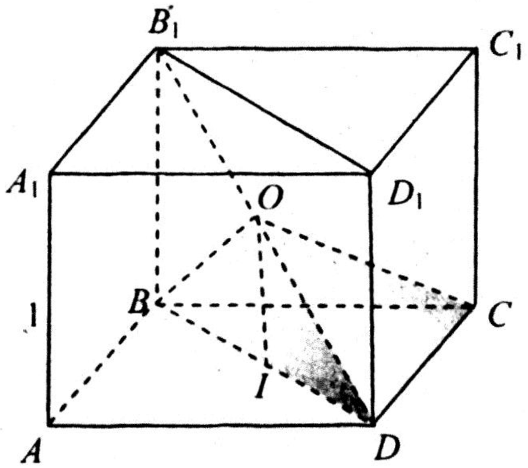
Gọi d là khoảng cách từ cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1). Dễ thấy $S_1 = \frac{1}{2}S_1$

$\Rightarrow \frac{1}{3}S_1d = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}S_1d$ hay $V_{C_1IJB_1A_1} = \frac{1}{2}V_{C_1ABB_1A_1} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABCB_1A_1C_1} = \frac{V}{3}$

$\Rightarrow V - V_{C_1IJB_1A_1} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$ hay $V_{ABIJC_1} = \frac{2V}{3}$ ■



Hình 93



Hình 94

11.11.*Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận (h.94)

Gọi I là trung điểm BD. Dễ thấy $OI \,//\, B_1B$ và $OI = \frac{1}{2}B_1B$

$\Rightarrow V_{OBCD} = \frac{1}{2}V_{B_1BCD} = \frac{1}{6}V_{B_1C_1D_1BCD} = \frac{1}{12}V_{A_1B_1C_1D_1ABCD} = \frac{1^3}{12} = \frac{1}{12}$ ■

11.12. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

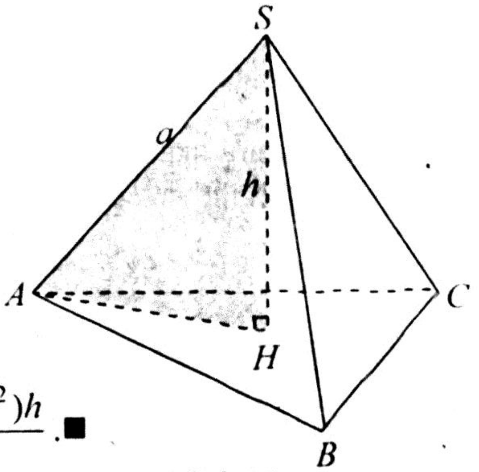
Lời giải tự luận :

Thể tích chóp $SABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.s_{\Delta SBC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}SB.SC = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{1}{6}abc$ ■

11.13. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h. 95):

Gọi H là trực tâm của tam giác đều ABC, khi đó H cũng là trọng tâm, HA là bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC và $SH \perp (ABC)$.



Hình 95

Trong tam giác SHA vuông tại H ta có :

$$HA = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{a^2 - h^2}$$

Áp dụng định lý sin vào tam giác đều ABC ta có

$$AB = 2HA\sin 60^0 = \sqrt{3}\sqrt{a^2 - h^2}$$

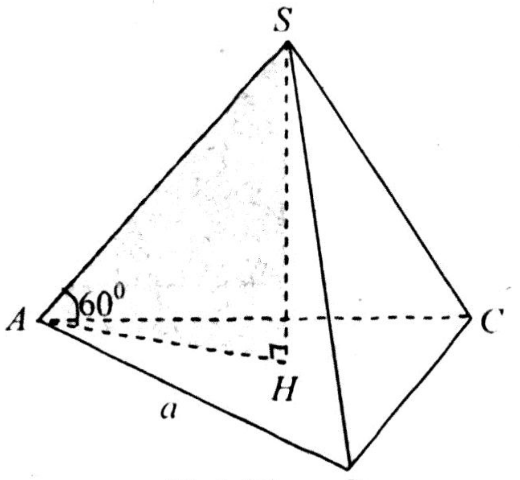
Diện tích ΔABC là $S = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}(a^2 - h^2)}{4}$.

Thể tích hình chóp $SABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{\sqrt{3}(a^2 - h^2)h}{4}$. ■

11.14.*Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận (h.96):

Gọi H là trực tâm của tam giác đều ABC, khi đó H cũng là trọng tâm, HA là bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC và $SH \perp (ABC)$, $\widehat{SHA} = 60^0$.



Hình 96

Áp dụng định lý sin vào tam giác đều ABC

ta có $HA = \dfrac{AB}{2\sin 60^0} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Trong tam giác SHA vuông tại H ta có :

$$SH = HA\tan 60^0 = \frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích hình chóp $SABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. ■

11.15.*Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận (h.97):

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Lại có $AB \perp BC$ (do $ABCD$ là hình vuông) nên $BC \perp (SAB)$

Từ đó suy ra $\widehat{CSB} = 60^0$

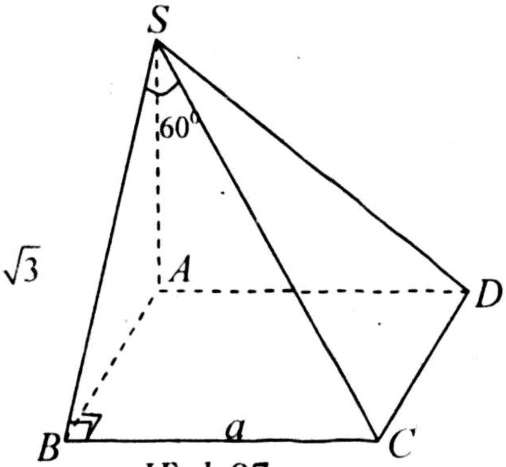
Trong ΔSBC vuông tại B có $SB = BC\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

Trong ΔSAB vuông tại A có

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}s_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$ ■



Hình 97

11.16. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận (h.98):

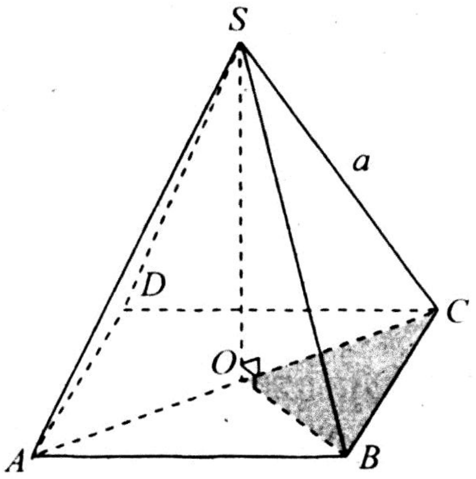
Gọi O là trung điểm AC. Khi đó $SO \perp (ABCD)$. Từ các giả thiết suy ra

$$SA = SC = AC = a \Rightarrow AB = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$SO = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy thể tích của hình chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}s_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$ ■



Hình 98

11.17. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận (h.97):

Cách 1. Từ các giả thiết suy ra $OB \perp OC$ và

$$OB = OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (*)$$

Thể tích hình chóp $S.OBC$ là $V = \frac{1}{6}.OB.OC.OS = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ (1)

Mặt khác, gọi x là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) thì thể tích hình chóp $S.OBC$ là $V = \frac{x}{3}s_{\Delta SBC} = \frac{x}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{xa^2\sqrt{3}}{12}$ (2)

So sánh (1) và (2) có $\frac{xa^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} \Rightarrow x\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Do O là trung điểm AC suy ra $d(A, (SBC)) = 2x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. ■

Cách 2. (Tiếp nối từ (*))

Ta có $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{6}{a^2}$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

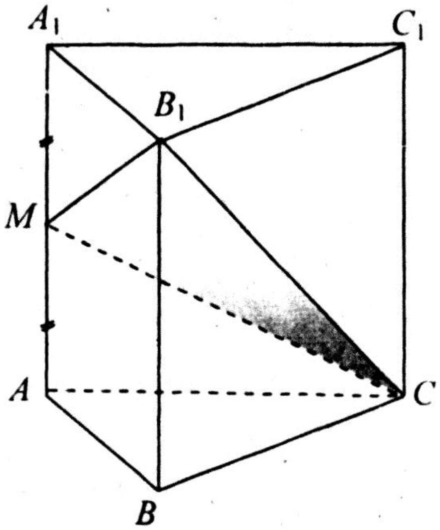
Phần còn lại như cách 1.

11.18. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận (h. 99):

Kí hiệu S, S_1 lần lượt là diện tích các đa giác ACC_1A_1.

Gọi V, V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích lăng trụ đều $ABC.A_1B_1C_1$, hình chóp $B_1MA_1C_1C$, hình chóp B_1MABC.



Hình 99

Gọi d là khoảng cách từ đường thẳng BB_1 đến mặt phẳng song song với nó là (ACC_1A_1). Dễ thấy $S_1 = \frac{3}{4}S \Rightarrow \frac{d}{3}.S_1 = \frac{3}{4}.\frac{d}{3}.S \Rightarrow V_1 = \frac{3}{4}V_2$

Ta biết $V_2 = \frac{2}{3}V \Rightarrow V_1 = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{2}V$ ■

Từ đây suy ra mặt phẳng $(MB'C)$ chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau, một cách nói khác là tỷ số thể tích giữa hai phần ấy bằng 1.

11.19. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận (h.100):

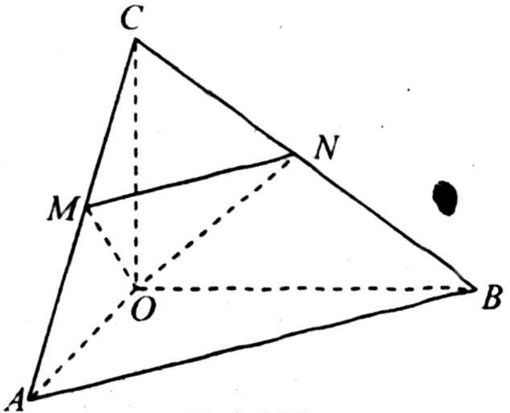
Thể tích của tứ diện $OABC$ là

$$V = \frac{1}{6} OA.OB.OC = \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3.$$

Gọi V_1 là thể tích của tứ diện $OMNC$

Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{CM}{CA}.\frac{CN}{CB}.\frac{CO}{CO} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_1 = \frac{V}{4} = \frac{a^3}{4}$ ■



Hình 100

11.20. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận (h.101):

Xét khối 8 mặt đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a.

Ta có $EA = EB = EC = ED$

$= FA = FB = FC = FD = a$ (1)

$\Rightarrow$ 4 điểm A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng EF.

Gọi $O = EF \cap (ABCD)$, thế thì

$EF \perp (ABCD)$ và O là trung điểm EF. (2)

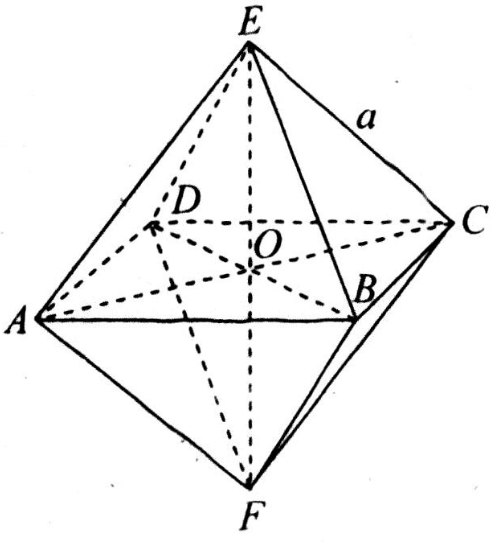
Do $AB = BC = CD = DA = a$ nên

$ABCD$ là hình thoi. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $O = AC \cap BD$ và

$AC = BD$. Do vậy $ABCD$ là hình vuông.

Gọi V, V' theo thứ tự là thể tích của khối 8 mặt đều $ABCDEF$, thể tích tứ diện đều $EABCD$



Hình 101

Rõ ràng $V = 2\,V' = \frac{2}{3}s_{ABCD}.EO = \frac{2}{3}a^2.EO$ (4)

Trong hình vuông $ABCD$ có $AC = BD = a\sqrt{2}$, $OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Trong ΔSOA vuông tại O ta có: $EO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

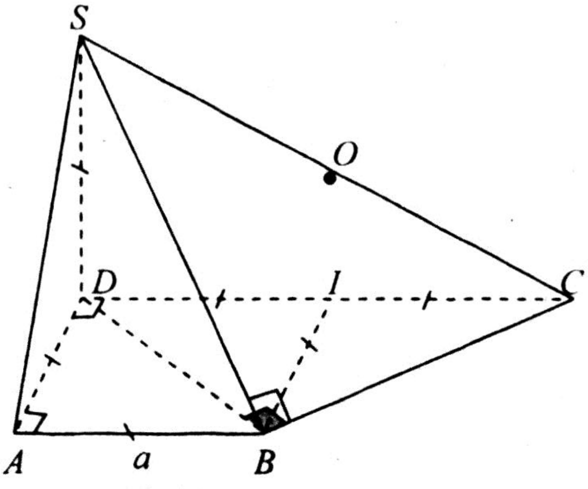
Thay vào (4) có $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ ■

Bảng kết quả câu hỏi bài tập trắc nghiệm 1							
Câu	**Đáp án**	**Câu**	**Đáp án**	**Câu**	**Đáp án**	**Câu**	**Đáp án**
11.1	**A**	11.6	**A**	11.11	**B**	11.16	**C**
11.2	**A**	11.7	**D**	11.12	**B**	11.17	**C**
11.3	**D**	11.8	**B**	11.13	**A**	11.18	**D**
11.4	**A**	11.9	**A**	11.14	**C**	11.19	**D**
11.5	**C**	11.10	**C**	11.15	**D**	11.20	**B**

BÀI TẬP 2

Mặt cầu, khối cầu

2.2 (h.102)



Hình 102

1) Theo giả thiết $SD \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \begin{cases} SD \perp DA \\ SD \perp DC \end{cases} \Rightarrow$ Các tam giác

SDA, SDC vuông tại D. (1)

• $DA \perp AB \Rightarrow SA \perp AB$ (định lý 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A. (2)

• Gọi I là trung điểm CD. Từ giả thiết suy ra $ABDI$ là hình vuông suy ra $BI = AD = a = \dfrac{CD}{2}$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B hay

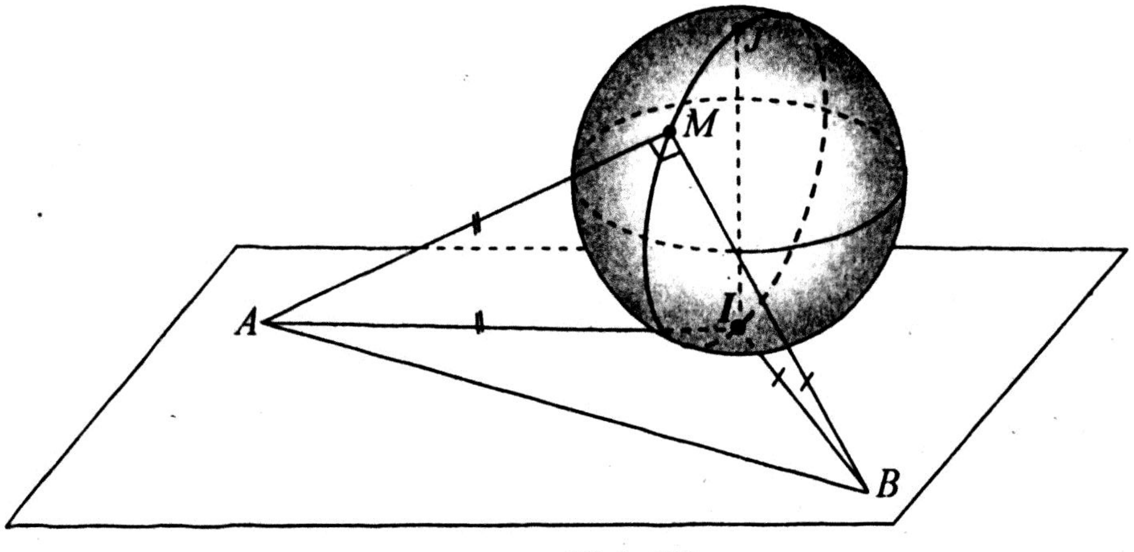
$DB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc) (3)

Các kết quả (1), (2), (3) cho thấy tất cả các mặt bên của hình chóp $SABCD$ đều là tam giác vuông.

2) Các điểm B, D đều nhìn SC dưới một góc vuông nên cả 4 điểm S, B, C, D đều nằm trên mặt cầu đường kính SC.

Ta có $SC^2 = SD^2 + DC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}$. Từ đó suy ra bán kính mặt cầu phải tìm là $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

2.2 • Hai tiếp tuyến kẻ từ điểm tới một mặt cầu thì bằng nhau nên ta có (h.103):



Hình 103

$$\begin{cases} AM = AI \\ BM = BI \end{cases} \begin{cases} AM^2 = AI^2 \\ BM^2 = BI^2 \end{cases} \Rightarrow AM^2 + BM^2 = AI^2 + BI^2 \qquad (1)$$

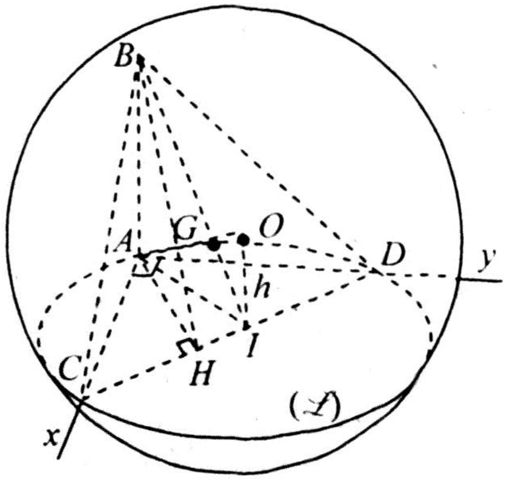
• Lại có $AB^2 = AM^2 + BM^2$ (do $\widehat{AMB} = 90^0$) (2)

So sánh (1) và (2) ta có $AB^2 = AI^2 + BI^2$ (đpcm)

Lời nhắn. Các bạn liên hệ với bài 2.27

2.3 1) (h.104) Gọi I là trung điểm CD. Nối O với I, Gọi $G = OA \cap BI$

Bởi O là tâm đường tròn ngoại tiếp khối tứ diện $ABCD$ $\Rightarrow O$ nằm trên mặt phẳng trung trực của AB



Hình 104

$$\Rightarrow \begin{cases} 2OI = AB \\ OI \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow 2IG = GB$$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔBCD.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AO}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})^2 = 4\left(\overrightarrow{AO}\right)^2$$

$$\Rightarrow (AB^2 + AC^2) + AD^2 +$$

$$+)\ (2\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}}_{=0}) = 4R^2$$

$\Leftrightarrow BC^2 + AD^2 = 4R^2$ (đpcm). Tương tự ta cũng có $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ (đpcm)

2) Ta có A, I là các điểm cố định, $\widehat{AHI} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính AI. Đó là một đường tròn cố định khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quanh quanh A trong mặt phẳng (P). (đpcm)

3) Ta có $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$ (định lý 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow s_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}CD.BH = CI.BH$. Do đó diện tích ΔBCD lớn nhất khi và chỉ khi BH lớn nhất.

Ta có $BH \le BI \Leftrightarrow \max BH = BI \Leftrightarrow H \equiv I \Leftrightarrow CD \perp AI$

Vậy $s_{\Delta BCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $CD \perp AI$ và $\max s_{\Delta BCD} = CI.BI$ (1)

Ta có $CI = \sqrt{OC^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - h^2}$ (2)

$BI = \sqrt{AH^2 + AI^2} = \sqrt{AH^2 + OA^2 - OI^2} = \sqrt{4h^2 + R^2 - h^2} = \sqrt{3h^2 + R^2}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) có $\max s_{\Delta BCD} = \sqrt{(R^2 - h^2)(3h^2 + R^2)}$

2.4. *Cách* 1.(h.105 - hình *ovan* là thiết diện của mặt cầu với mặt phẳng (SAO))

1) Gọi $H = SS' \cap (ABC)$ thì H là trực tâm tam giác đều ABC. Kẻ AH cắt BC tại I. (*)

Trong tam giác SAS' vuông tại A ta có $SA^2 = SH.SS' = (R + x).2R$

Trong tam giác đều ABC ta có $AB = 2AH\sin 60^0 = AH\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB^2 = 3AH^2 = 3HS.HS' = 3(R + x)(R - x) = 3(R^2 - x^2)$

Hình chóp đều $SABC$ trở thành tứ diện đều khi và chỉ khi $SA = AB$

$\Leftrightarrow SA^2 = AB^2 \Leftrightarrow (R + x).2R = 3(R^2 - x^2)$

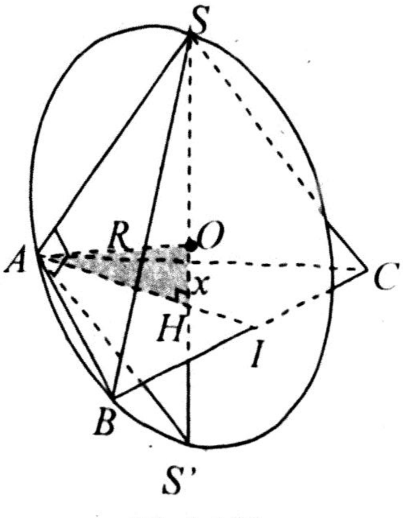
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0 \overset{0<x<R}{\Rightarrow} x = \frac{R}{3}$$

Với $x = \dfrac{R}{3}$ ta có $SH = R + \dfrac{R}{3} = \dfrac{4R}{3}$,

$$AB^2 = 3(R^2 - x^2) = 3(R^2 - \frac{R^2}{9}) = \frac{8R^2}{3}$$

Diện tích tam giác đều ABC là $s_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$

Thể tích tứ diện đều $SABC$



Hình 105

là $V=\frac{1}{3}s_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}.\frac{4R}{3}=\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$

Cách 2. Xét tứ diện đều $S.ABC$ nội tiếp hình cầu (O, R).

Rõ ràng O là trọng tâm của nó nghĩa là $-\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow OH=\frac{OS}{3}=\frac{R}{3}$. Vậy để hình chóp đã cho trở thành tứ diện đều thì điều kiện cần và đủ là mặt phẳng (ABC) cách tâm O của mặt cầu một khoảng bằng $\frac{R}{3}$.

Phần còn lại như cách 1.

2) Ta có $S'A^2=S'B^2=S'H'.S'S=\frac{2R}{3}.2R=\frac{4R^2}{3}\Rightarrow S'A^2+S'B^2=\frac{8R^2}{3}=AB^2$

$\Rightarrow \widehat{AS'B}=90^0$ hay $S'A\perp S'B$. Tương tự ta cũng có $S'A\perp S'C$, $S'A\perp S'C$.
Đó là điều phải chứng minh.

Ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S'.ABC}}=\frac{\frac{1}{3}SH.s_{\Delta ABC}}{\frac{1}{3}S'H.s_{\Delta ABC}}=\frac{SH}{S'H}=\frac{\frac{4R}{3}}{\frac{2R}{3}}=2\Leftrightarrow V_{S.ABC}=2V_{S'.ABC}$ (đpcm))

2.5 (h.106). Từ giả thiết suy ra $\widehat{BSC}=90^0$. Trong ΔBSC vuông tại S ta có

- $SB^2+SC^2=BC^2=a$ (1)
- $SI=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$ (2)

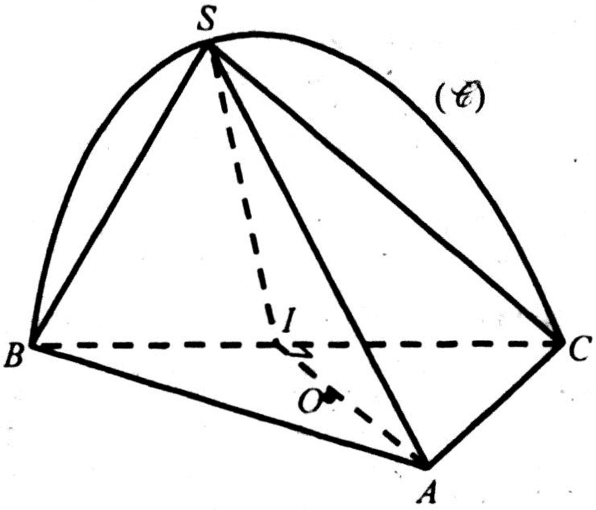
Gọi I là trung điểm BC. Do ΔABC là tam giác đều nên $AI\perp BC$, kết hợp với $(SBC)\perp(ABC)\Rightarrow AI\perp(SBC)\Rightarrow AI\perp SI$.

Trong ΔSIA vuông tại I ta có $SA^2=SI^2+IA^2\overset{(2)}{=}\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=a^2$. (3)

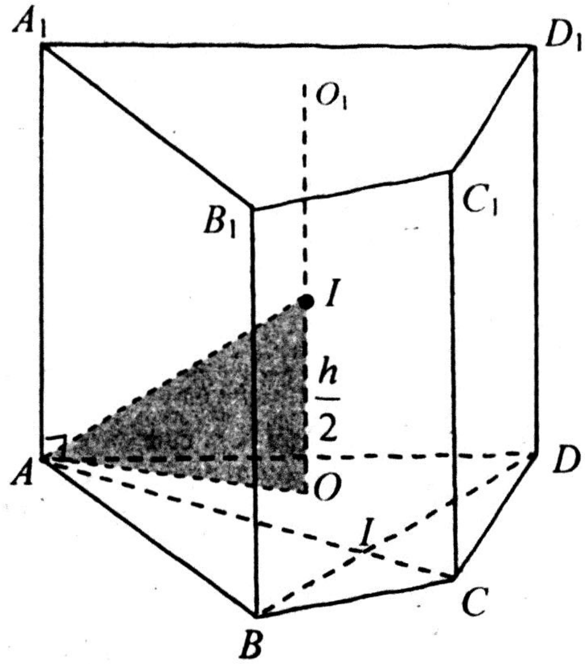
Từ (1), (3) suy ra $SA^2+SB^2+SC^2=2a^2$ (const) (đpcm)

Gọi O là trọng tâm ΔABC ta có $OA=OB=OC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $O\in AI$. Dễ thấy AI là trục của đường trong $(\mathscr{C})$ nên $OS=OB=OC$.

Từ đó có $OS=OA=OB=OC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Điều ấy chứng tỏ tứ diện $SABC$ có mặt cầu ngoại tiếp là mặt cầu tâm O (trọng tâm ΔABC), bán kính bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Rõ ràng đó là một mặt cầu cố định. (đpcm)



Hình 106



Hình 107

2.6. (h.107) Bởi có $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$ nên $ABCD$ là tứ giác có đường tròn ngoại tiếp. Kết hợp với giả thiết lăng trụ đứng đã cho có mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi O, O_1, J theo thứ tự là tâmcác đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$,tứ giác $A_1B_1C_1D_1$, I là trung điểm OO_1. cố nhiên tâm mặt cầu ngoại tiếp và IA là bán kính.Ta có

$$JA^2 = JO^2 + OA^2 = \frac{h^2}{4} + OA^2$$

Bởi thế bán kính mặt cầu nhỏ nhất khi và chỉ khi OA đạt giá trị bé nhất.

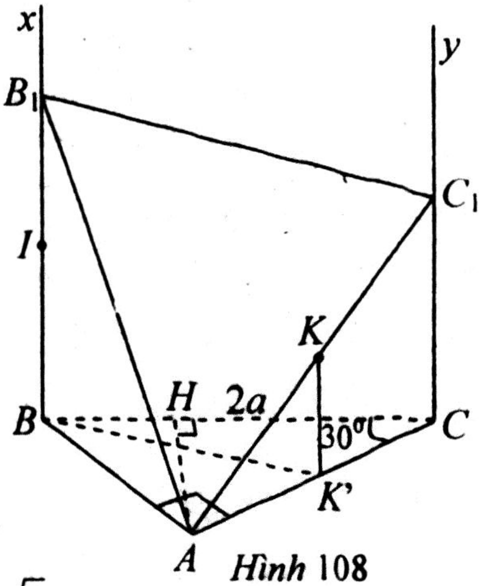
Theo định nghĩa phương tích ta có

$$-\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = OA^2 - IO^2 \Rightarrow h^2 = OA^2 - IO^2$$

$\Leftrightarrow OA^2 = h^2 + IO^2$. Từ đây suy ra IA bé nhất khi và chỉ khi IO bé nhất, Điều này có khi và chỉ khi $O \equiv I$. Khi đó $OA^2 = h^2$ và $JA^2 = h^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{5h^2}{4}$

$\Rightarrow JA = \frac{h\sqrt{5}}{2}$. Đó là giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đã cho.

2.7. (h.108)



Hình 108

1) Gọi I là trung điểm BB_1. Do Bx // Cy nên khoảng cách từ I đến Cy bằng khoảng cách từ B đến Cy và bằng $BC = 2a$.

Mặt cầu đường kính BB_1 tiếp xúc với CyKhi và chỉ khi $IJ = \frac{BB_1}{2} \Leftrightarrow BB_1 = 4a$.

Đó là hệ thức xác định B_1.

Gọi K, K' theo thứ tự là trung điểm của AC_1, $AC \Rightarrow KK'$ // C_1C// $Bx \Rightarrow$ Khoảng cách từ K đến Bx bằng khoảng cách từ K' Bx và bằng BK'.

Trong tam giác ABC ta có

+) $AB = BC\cos 30^0 = a$,

+) $AC = BC\sin 30^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow AK' = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

+) $BK'^2 = AB^2 + AK'^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow BK' = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

- Mặt cầu đường kính AC_1 tiếp xúc với Bx khi và chỉ khi khoảng cách từ K đến Bx bằng $\frac{AC_1}{2}$ tức là $\frac{AC_1}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow AC_1 = a\sqrt{7} \Leftrightarrow AC_1{}^2 = 7a^2$

$\Leftrightarrow AC^2 + CC_1{}^2 = 7a^2 \Leftrightarrow 3a^2 + CC_1{}^2 = 7a^2 \Leftrightarrow CC_1{}^2 = 4a^2 \Leftrightarrow CC_1 = 2a.$

Đó là hệ thức xác định C_1.

2) Ta có $BB_1 \neq CC_1$ nên mặt BCC_1B_1 là hình thang vuông và không thể có đường tròn ngoại tiếp nên khối đa diện $ABCC_1B_1$ không có mặt cầu ngoại tiếp.

Kẻ đường cao AH của ΔABC ta có $AH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Dễ thấy $(ABC) \perp (BCC_1B_1)$ nên $AH \perp (BCC_1B_1)$ và thể tích của khối chóp $A.BCC_1B_1$ là $V_{A.BCC_1B_1} = \frac{1}{3}.AH.s_{BCC_1B_1} = \frac{1}{3}.AH.\frac{BB_1 + CC_1}{2}.BC$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{4a+2a}{2}.2a = a^3\sqrt{3}$$

2.8.(h.109) Gọi (D_1) là đường tròn nội tiếp ΔABC,các tiếp điểm là M, N, L và có trục là (Δ_C). Gọi (C_1) là đường tròn nội tiếp ΔABD,các tiếp điểm là M', P, Q và có trục là (Δ_D).

Với ΔABC có $AM = \frac{AB + AC - BC}{2}$. Với ΔABD có $AM' = \frac{AB + AD - BD}{2}$

Theo giả thiết $AC + BD = AD + BC \Leftrightarrow AB - BC = AD - BD$

$\Rightarrow AM = AM' \Rightarrow M \equiv M'$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng$(C_1MD_1) \perp AB$

Cố nhiên $\begin{cases}(\Delta_C) \perp AB \\ (\Delta_D) \perp AB\end{cases} \Rightarrow (\Delta_C)$ và (Δ_D) cắt nhau. Gọi $O = (\Delta_C) \cap (\Delta_D)$ thì O là điểm cách đều 5 cạnh AB, AC, AD, BC, BD.

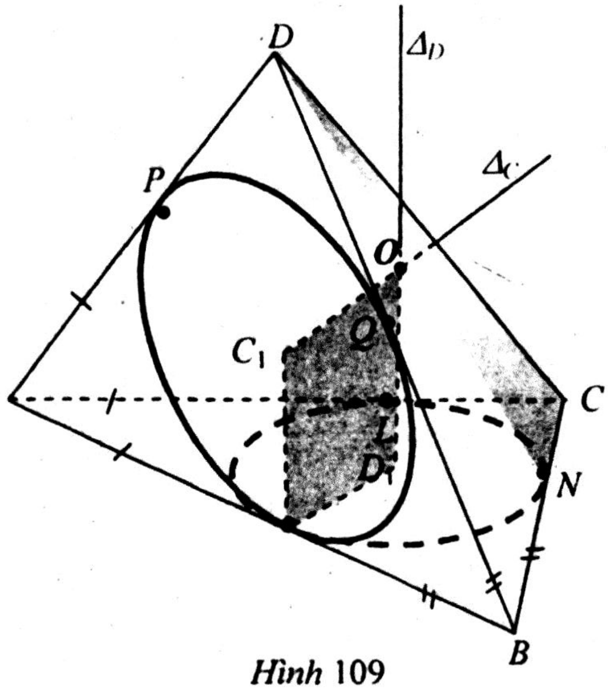
$(OM = ON = OL = OP = OQ)$

Gọi (B_1) là đường tròn nội tiếp ΔACD ,các tiếp điểm là P, Q, R và có trục là (Δ_B). (1)

Lập luận tương tự suy ra trên (Δ_D) cũng tồn lại điểm O' cách đều 5 cạnh AC, AD, BC, BD, CD.

$(O'N = O'L = O'P = O'Q = O'M)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra cả Q và O' đều là tâm của mặt cầu đi qua 4 điểm không đồng phẳng P, M, N, L nên $O \equiv O'$ Đó là tâm của mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện $ABCD$.



Hình 109

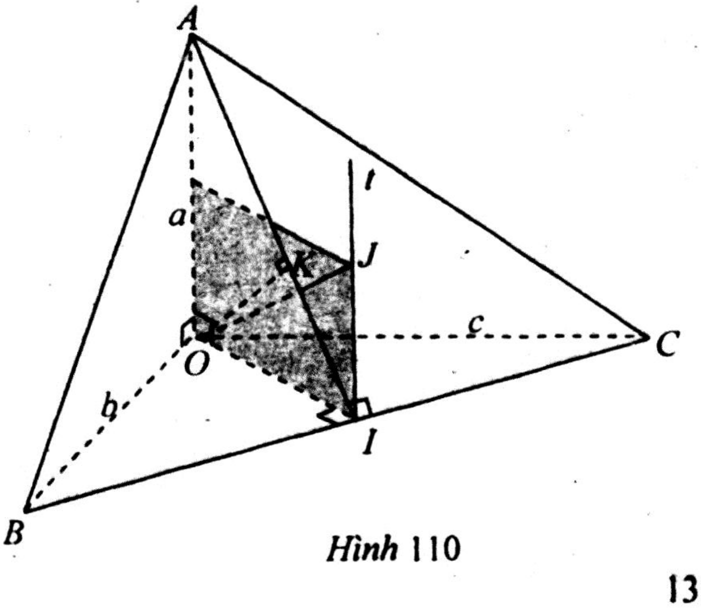
2.9 (h.110). 1) Kẻ $OI \perp BC, I \in BC$; $OK \perp AI, K \in AI$

Do $\begin{cases}OA \perp OB \\ OA \perp OC\end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp OI$

Trong các tam giác vuông OAI, OBC ta có

$$\begin{cases}\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} \\ \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\end{cases}$$



Hình 110

$$\Rightarrow \frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}\Rightarrow OK=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

2) Thể tích tứ diện $OABC$ là $V=\frac{1}{6}abc$

Từ giả thiết $OA = OB + OC \Leftrightarrow a=b+c \Leftrightarrow a^2=(b+c)^2\geq 4bc \Rightarrow bc\leq \frac{a^2}{4}$

Do vậy $V\leq \frac{a^3}{24}$. Dấu đẳng thức có khi $b=c=\frac{a}{2}$. Vậy $\max V=\frac{a^3}{24}$

Qua I dựng đường thẳng $It\perp(OBC)$. Trong mặt phẳng (AOI) lấy J là giao của It với đường trung trực của OA. Khi đó J là tâm và JO là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Ta có

$$OJ=\sqrt{IJ^2+OI^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski thì $(1^2+1^2)(b^2+c^2)\geq(b+c)^2=a^2$

$$\Rightarrow b^2+c^2\geq\frac{a^2}{2}\;\Rightarrow\; OJ=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Dấu đẳng thức có khi $b=c=\frac{a}{2}\Rightarrow \text{Min}OJ=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Tóm lại khi $b=c=\frac{a}{2}$ ta đồng thời tứ diện $OABC$ có thể tích đạt giá trị lớn nhất, còn bán kính mặt cầu ngoại tiếp của nó lại đạt giá trị nhỏ nhất.

2.10.1) (h.111).

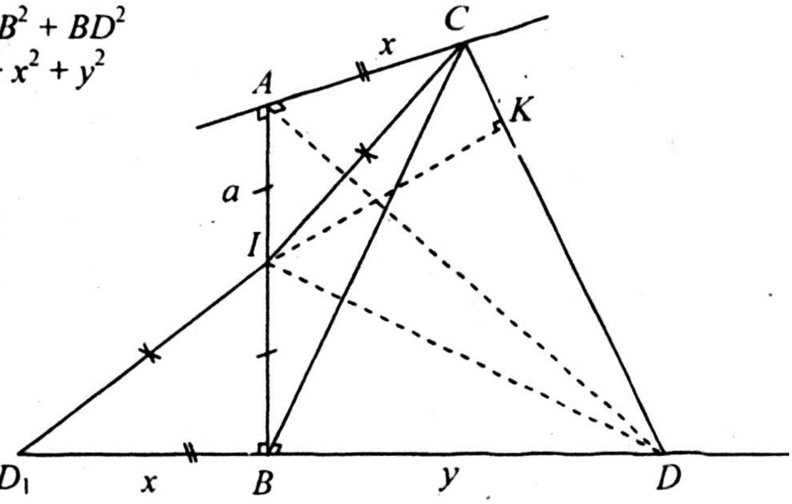
Ta có $\begin{cases}AC\perp AB\\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow AC\perp(ABD)\Rightarrow AC\perp AD$ hay $\widehat{CAD}=90^0$

Tương tự $\widehat{CBD}=90^0$. Suy ra CD là đường kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Như thế trung điểm của CD là tâm, $\frac{CD}{2}$ là bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $(ABCD)$.

Ta có $CD^2=AC^2+AD^2$, $AD^2=AB^2+BD^2$

$\Rightarrow CD^2=AB^2+AC^2+BD^2=a^2+x^2+y^2$

$\Rightarrow R=\frac{CD}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2+y^2}$



Hình 111

2) Trên tia đối của BD lấy điểm D_1 sao cho $BD_1 = AC = x$.

Khi đó $D_1D = x + y = CD$ (1)

Gọi I là trung điểm AB. Kẻ $IK \perp CD$, $K \in CD$. Khi đó ΔIAC và ΔIAD_1 là hai tam giác vuông bằng nhau, suy ra $IC = ID_1$. (2)

Lại có ID là cạnh chung nên từ (1), (2) suy ra $\Delta ID_1D = \Delta IKD$ (c.c.c)

$\Rightarrow IK = IB = IA$. (3)

Bởi $IK \perp CD$, nên kết quả **(3)** khẳng định CD là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AB (đpcm)

3) Kí hiệu $s_{\Delta XYZ}$ là diện tích ΔXYZ. Để ý các mặt của tứ diện đều là tam giác vuông, sử dụng kí hiệu trên ta có :

$$\begin{cases} 2.s_{\Delta ABC} = a.x \\ 2.s_{\Delta ABD} = a.y \\ 2.s_{\Delta ACD} = x.AD = x\sqrt{a^2 + y^2} \\ 2.s_{\Delta BCD} = y.BC = y\sqrt{a^2 + x^2} \end{cases}$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên ta có diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ là

$$2S_{tp} = a(x + y) + x\sqrt{a^2 + y^2} + y\sqrt{a^2 + x^2}$$

Khi có $x + y = CD$, theo kết quả câu 2 ta có

$$(x + y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 \quad \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

- $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$.
-

$$x\sqrt{a^2 + y^2} + y\sqrt{a^2 + x^2} \geq 2\sqrt{xy\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + y^2)}} \geq 2\sqrt{xy\sqrt{a^4 + a^2(x^2 + y^2) + x^2y^2}}$$

$$\geq 2\sqrt{xy\sqrt{a^4 + 2a^2xy + x^2y^2}} = 2\sqrt{xy(a^2 + xy)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a^2}{2}(a^2 + \frac{a^2}{2})} = a^2\sqrt{3}$$

Suy ra $2S_{tp} \geq a^2\sqrt{2} + a^2\sqrt{3} = a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Dấu đẳng thức trong tất cả các bất đẳng thức trên có khi $x = y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Vậy nên $\min S_{tp} = \dfrac{a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}$ ■

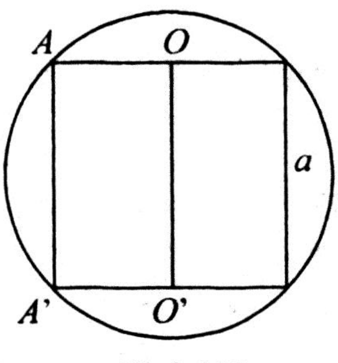
Mặt trụ, khối trụ

2.11$^{(P)}$ Gọi cạnh của thiết diện là a.

Theo giả thiết ta có $a^2 = 12$ (h.112)

Bán kính đáy hình trụ là $R = \dfrac{a}{2}$

Chiều cao hình trụ là $h = a$



Hình 112

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = \pi R(R+h) = \pi\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right) = \frac{3\pi a^2}{4} = \frac{3\pi.12}{4} = 9\pi \;\blacksquare$$

2.12.1) Gọi R, h, $Sđ$, Sxq theo thứ tự là bán kính đáy, chiều cao, diện tích đáy và diện tích xung quanh của hình trụ. Theo giả thiết ta có

Diện tích đáy của hình trụ là : $Sđ = \pi R^2 = 4\pi a^2 \Rightarrow R = 2a$

Diện tích xung quanh của hình trụ là : $Sxq = 2\pi R\,h = \mathrm{S} \;\Rightarrow\; h = \dfrac{S}{2\pi R} = \dfrac{S}{4\pi a}$

Vậy nên thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = 4\pi a^2.\dfrac{S}{4\pi a} = S.a \;\blacksquare$

2) Thiết diện qua trục là hình chữ nhật có các kích thước là $2R$ và h. Diện tích của thiết diện ấy là

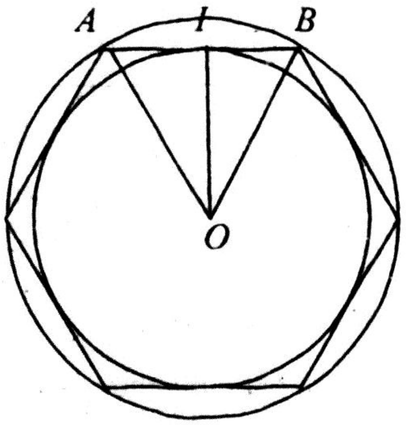
$$S_{td} = 2Rh = 4a.\frac{S}{4\pi a} \Rightarrow S_{td} = \frac{S}{\pi} \;\blacksquare$$

2.13. (h.113). Gọi R, r theo thứ tự là các bán kính ngoại tiếp, nội tiếp đường tròn đáy.

Gọi O, A, B theo thứ tự là tâm và hai đỉnh liên tiếp của lục giác đều, I là trung điểm AB.

Khi đó OAB là tam giác đều có cạnh bằng a. Dễ dàng suy ra

$$R = AB = a,\; r = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Hình 113

Do vậy

- Thể tích hình trụ ngoại tiếplà : $V = \pi R^2 h = \pi a^2 h$
- Diện tích xung quanh hình trụ ngoại tiếplà : $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi ah$
- Thể tích hình trụ nội tiếplà : $V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^2 h}{4}$ $\blacksquare$
- Diện tích xung quanh hình trụ nội tiếp là : $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi\dfrac{a\sqrt{3}}{2}h = \pi ah\sqrt{3}$ $\blacksquare$

2.14. (h.114)

1) Gọi I là trung điểm CD, Ta có $OI \perp CD$

$\Rightarrow O'I \perp CD$. Vậy $\widehat{O'IO} = \alpha$

Dễ thấy $AB \,//\, CD$, tức là $ABCD$ là hình thang cân.

Diện tích S của $ABCD$ được tính theo cách

$$S = \frac{AB + CD}{2}.O'I = (O'B + LC).O'I \quad (1)$$

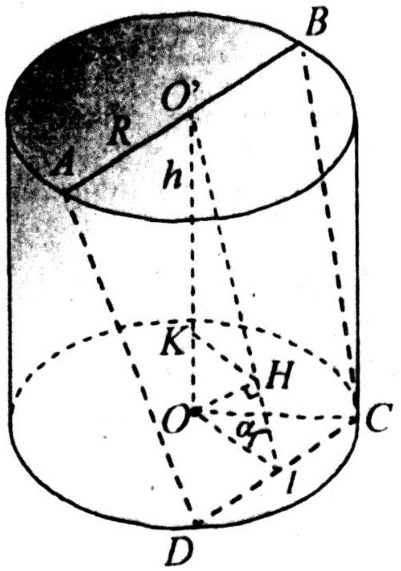
Trong tam giác $O'OI$ vuông tại O ta có

$$O'I = \frac{OI}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$OI = O'O\cot\alpha = h\cot\alpha \quad (2)$$

Trong tam giác OIC vuông tại I ta có

$$IC = \sqrt{OC^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha} \quad (3)$$



Hình 114

Thay (2), (3) vào (1) ta có $S = (R + \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}).\dfrac{h}{\sin\alpha}$

Chú ý : Để dây CD tồn tại (thiết diện là hình thang) phải có $OI \le R \Leftrightarrow \tan\alpha \le \dfrac{h}{R}$

$\Leftrightarrow \alpha \le \arctan\dfrac{h}{R}$. ■

2) Trong ΔOHI vuông tại H ta có $OH = OI\sin\alpha = h\cot\alpha\sin\alpha = h\cos\alpha$

Kẻ $HK \perp OO'$, $K \in OO'$ suy ra $\widehat{HOK} = \alpha$.

Trong ΔHOK vuông tại K ta có $OH = OH\cos\alpha = h\cos^2\alpha \Rightarrow K$ cố định. (4)

$KH = OH\sin\alpha = h\cos\alpha\sin\alpha \Rightarrow KH$ có độ dài không đổi. (5)

Từ (4), (5) suy ra khi (P) thay đổi, H luôn thuộc đường tròn tâm K, bán kính bằng $h\cos\alpha\sin\alpha$ nằm trong mặt phẳng đi qua K vuông góc với OO'. Cố nhiên đó là một đường tròn cố định. ■

2.15. Gọi x, y lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Khi đó thể tích của hình trụ là $V = \pi x^2 y$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = x^2 + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xy}{2}$

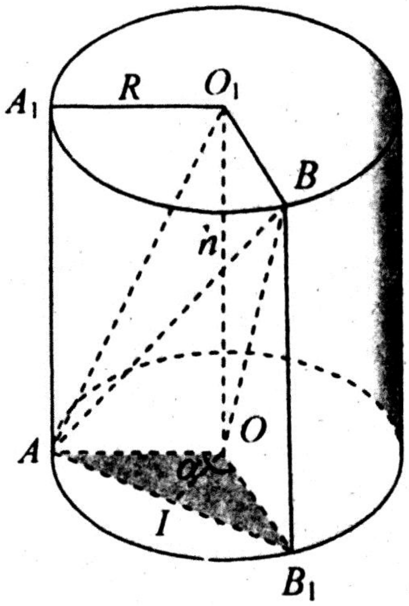
Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $x^2 + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xy}{2} \ge 3\sqrt[3]{x^2.\dfrac{xy}{2}.\dfrac{xy}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}x^2y$

$$\Rightarrow S \ge \frac{3}{\sqrt{2}}x^2y \Leftrightarrow \pi S \ge \frac{3}{\sqrt{2}}\pi x^2 y \Leftrightarrow \pi S \ge \frac{3\sqrt{2}}{2}V \Leftrightarrow V \le \frac{\pi S\sqrt{2}}{3}$$

Dấu đẳng thức có khi $x^2 = \dfrac{xy}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2} = \sqrt[3]{\dfrac{\pi S\sqrt{2}}{6}} \Rightarrow \max V = \sqrt[3]{\dfrac{\pi S\sqrt{2}}{6}}$

Vậy trong các hình trụ có diện tích toàn phần không đổi thì hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao là hình trụ có thể tích lớn nhất. ■

2.16. (h.115)



Hình 115

1) Ta có $\begin{cases} O_1O \perp OA \\ O_1O \perp O_1B \end{cases}$ nên tứ diện O_1OAB có thể tích là

$$V = \frac{1}{6}.O_1O.O_1B.OA.\sin\varphi = \frac{1}{6}R^2h\sin\varphi$$

$\Rightarrow V \le \dfrac{1}{6}R^2h$. Dấu đẳng thức có khi $\varphi = 90^0$

$\Rightarrow \max V = \dfrac{1}{6}R^2h$. ■

2) Kẻ đường sinh BB_1 ta có $BB_1 // O_1O$

$\Rightarrow (\alpha) = (BAB_1)$

Lấy I là trung điểm AB_1 thì $OI \perp AB_1$.

Dễ thấy $OI \perp (BAB_1)$ nên OI là khoảng cách giữa O_1O và (α).

Trong ΔOIA vuông tại I ta có $OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - \dfrac{AB_1^2}{4}$ (1)

Trong ΔOAB_1 ta có $AB_1{}^2 = OA^2 + OB_1{}^2 - 2OA.OB_1\cos\varphi = 2R^2(1 - \cos\varphi)$

Thay vào (1) ta có $OI^2 = R^2 - \frac{R^2}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{R^2}{2}(1+\cos\varphi) = R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$

$\Leftrightarrow OI = R\cos\frac{\varphi}{2}$. Đó là khoảng cách từ OO_1 đến mặt phẳng (α). (2)

3) Từ (2) suy ra (α) là tiếp diện của một hình trụ có trục là OO_1 bán kính bằng $OI = R\cos\frac{\varphi}{2}$. Đó là một hình trụ cố định.■

2.17. (h.116) Kẻ đường sinh AA_1. Trong đường tròn $(\mathscr{C})$ kẻ đường kính A_1D và dây $BC \perp AD$. Khi đó ta có $AB = AC$ (1)

Gọi $I = A_1D \cap BC$ thì I là trung điểm BC. Kí hiệu $AI = x$ $(0 < x < 2R)$.

Trong đường tròn $(\mathscr{C})$ ta có

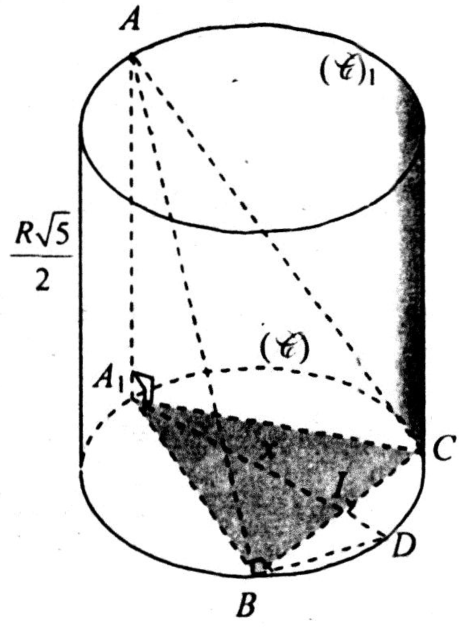
- $IB^2 = AI.ID = x(2R-x) \Leftrightarrow \frac{BC^2}{4} = x(2R-x) \Leftrightarrow BC^2 = 4x(2R-x)$
- $A_1B^2 = AI.AD \Leftrightarrow A_1B^2 = x.2R$
- Lại có $AB^2 = A_1A^2 + A_1B^2 = \frac{5R^2}{4} + 2Rx$
- ΔABC là tam giác đều khi và chỉ khi

$$AB = AC = BC \overset{(1)}{\Leftrightarrow} AB^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5R^2}{4} + 2Rx = 4x(2R-x)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 6Rx + \frac{5R^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \left\{x = \frac{R}{4}; x = \frac{5R}{4}\right\}$$

Vậy có hai vị trí của BC để ΔABC là tam giác đều. Đó là khi $BC \perp A_1D$ và cách A một khoảng AI với $AI = \frac{R}{4}$ hoặc $AI = \frac{5R}{4}$ ■



Hình 116

Mặt nón, khối nón

$\mathbf{2.18^{(P)}}$ (h.117).Gọi $O = AD \cap BC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn đáy của hình nón ngoại tiếp hình chóp.Gọi I là trung điểm AB thì $OI \perp AB$. Từ đó suy ra

+ $SI \perp AB$ (định lý 3 đường vuông góc)

Do vậy $\widehat{SIO} = 60^0$

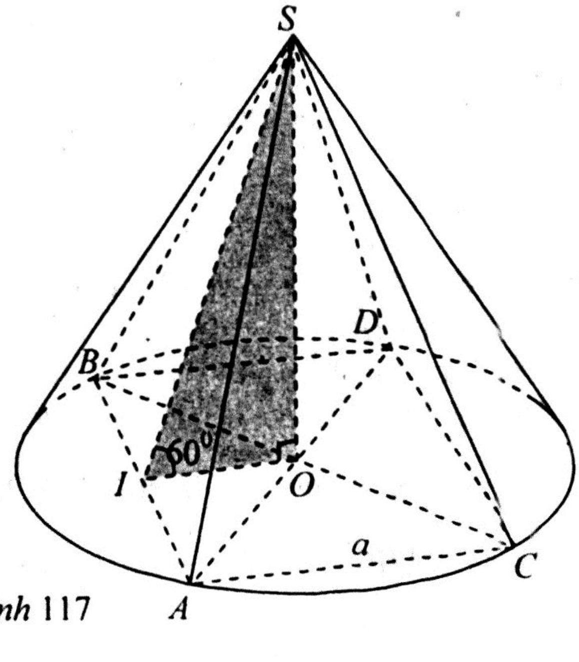
+ $OI = \frac{a}{2}$

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón. Rõ ràng

$R = AD = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác SOI vuông tại O có

$h = SO = OI\tan 60^0 = \frac{a}{4}$

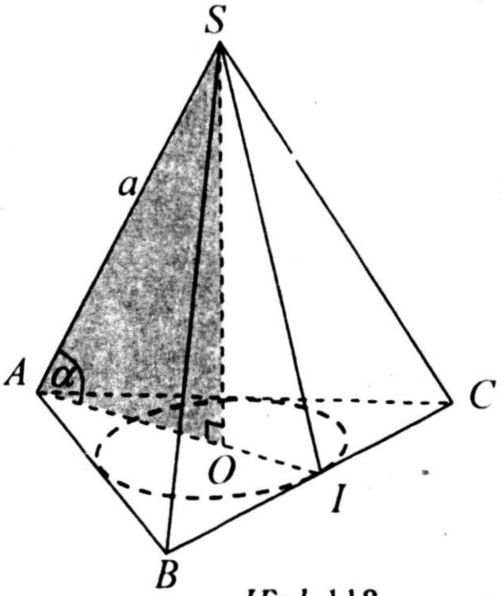


Hình 117

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là : $S_{xq} = \pi R h = \pi.a\sqrt{2}.\dfrac{a}{4} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$

Thể tích hình chóp là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}.2a^2.\dfrac{a}{4} = \dfrac{\pi a^3}{6}$ ■

2.19$^{(P)}$ (h.118). Gọi O là trọng tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn đáy của hình nón ngoại tiếp hình chóp. Kéo dài AO cắt BC tại I khi đó OI là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC, đó cũng là đường tròn đáy của hình nón ngoại tiếp hình nón. Goi R, h theo thứ tự là bán kính đáy và chiều cao của hình nón nội tiếp hình chóp.



Hình 118

Trong tam giác SOA vuông tại O

ta có $SO = SA\sin\alpha = a\sin\alpha$

$$2OI = OA = \frac{SA}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow OI = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Trong tam giác SOI vuông tại O

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + \frac{a^2}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^4\alpha}$$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón nội tiếp hình chóp là

$$S_{tp} = \pi.OI(OI + SI) = \frac{\pi a}{2\sin\alpha}.\left(\frac{a}{2\sin\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^4\alpha}\right)$$

$$= \frac{\pi a^2(1+\sqrt{1+\sin^4\alpha})}{4\sin^2\alpha}$$

Thể tích của hình nón nội tiếp hình chóp là

$$V = \frac{\pi}{3}OI^2.SO = \frac{\pi}{3}.\frac{a^2}{2^2\sin^2\alpha}.a\sin\alpha = \frac{\pi a^3}{12\sin\alpha}.\blacksquare$$

2.20$^{(P)}$ (h.119)

Gọi I là trung điểm BA, khi đó $OI \perp BA \Rightarrow SI \perp BA \Rightarrow \widehat{SIO} = \alpha$

Trong ΔSOI vuông tại O ta có

$$SI = \frac{SO}{\sin\alpha} = \frac{R\sqrt{3}}{\sin\alpha},$$

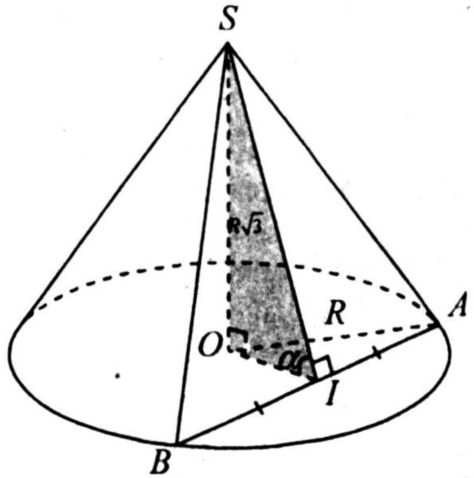
$$OI = SO\cot\alpha = R\sqrt{3}\cot\alpha$$

Trong ΔOIA vuông tại I ta có

$$IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - 3R^2\cot^2\alpha}$$

$$= R\sqrt{1-3\cot^2\alpha}$$

Để IA tồn tại phải có $1-3\cot^2\alpha \geq 0$



Hình 119

$\Leftrightarrow \cot^2\alpha \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow 60^0 < \alpha \le 90^0$

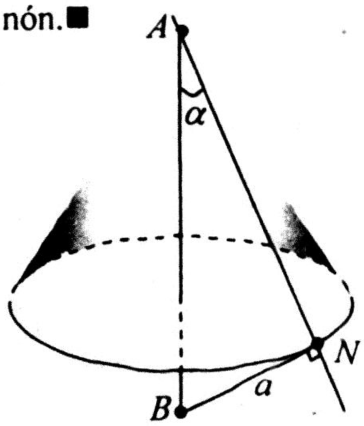
Diện tích ΔSAB là $s_{\Delta SAB} = SI.IA$

$$= \frac{R\sqrt{3}}{\sin\alpha} R\sqrt{1-3\cot^2\alpha} = \frac{R^2\sqrt{3}}{\sin\alpha}\sqrt{1-3\cot^2\alpha} = R^2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-3\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$= R^2\sqrt{3}\sqrt{(1+\cot^2\alpha)(1-3\cot^2\alpha)} = R^2\sqrt{3}\sqrt{(1-2\cot^2\alpha-3\cot^4\alpha)}$$

$\Rightarrow s_{\Delta SAB} \le R^2\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức có khi $\cot^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^0$

Vậy $\max s_{\Delta SAB} = R^2\sqrt{3}$. Đó là thiết diện qua trục của hình nón.■



Hình 120

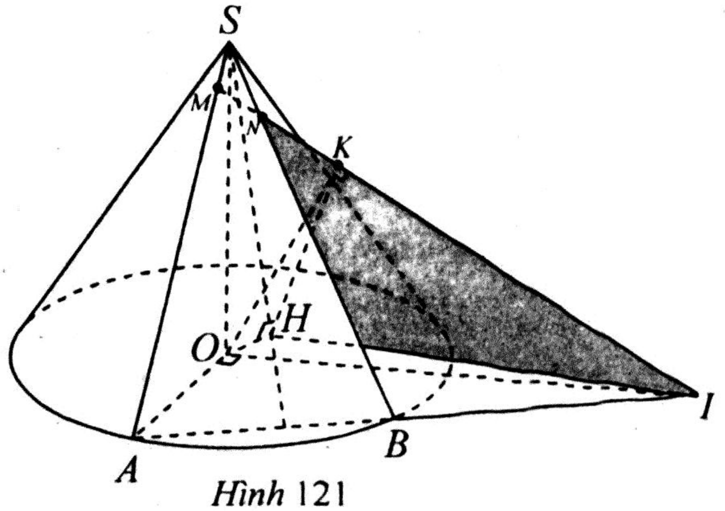
2.21$^{(P)}$.(h.120). Nối A với B. Kẻ $BN \perp (d)$, $N \in (d)$)

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và (d)

Trong tam giác vuông ANB vuông tại N ta có

$$\sin\alpha = \frac{BN}{AB} = \frac{a}{AB} \text{ (không đổi).}$$

Vậy khi quay quanh A, đường thẳng (d) luôn tạo với đường thẳng AB một góc α $(= \arcsin\frac{a}{AB})$ không đổi nên (d) thuộc mặt nón cố định có đỉnh là A và góc ở đỉnh bằng 2α. ■



Hình 121

2.22.(h.121)

1) Thể tích hình nón là

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}R^2 2R = \frac{2\pi R^3}{3}$$

- Ta có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2}$

$$= \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}$$

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi R^2\sqrt{5}$.■

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (SAI).

Theo giả thiết $OK \perp IM \Rightarrow HK \perp IM \Rightarrow K$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính IH.

Ta dễ dàng chứng minh H cũng là trực tâm ΔSAI. ■

Bài tập cuối chương

Bài tập tự luận

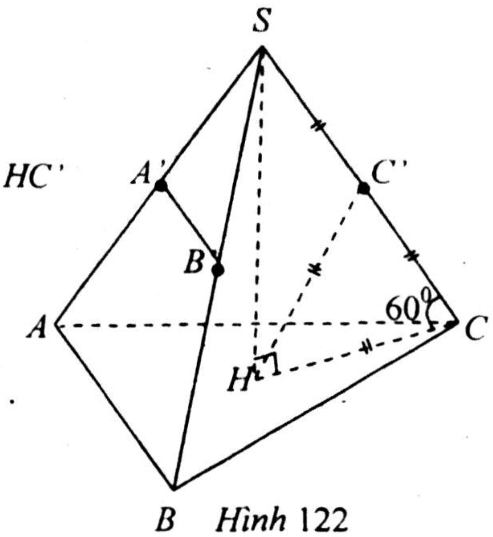
2.23(h.122) Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm SA, SB, SC. Khi đó $A'B'//AB$ nên $ABB'A'$ là hình thang. Kết hợp với giả thiết cùng nằm trên một mặt cầu suy ra $ABB'A'$ là hình thang cân $\Rightarrow 2A'A = 2B'B \Rightarrow SA = SB$.

Tương tự $SA = SC$

Do đó $SA = SB = SC$ (1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Từ (1) suy ra $HA = HB =$ (2)



Hình 122

Theo giả thiết thì $\widehat{SCH} = 60^0$.

Trong ΔSHC vuông tại H, $\widehat{SCH} = 60^0$

$\Rightarrow HC = HC' = CC'$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $HA = HB = HC = HA' = HB' = HC'$

$\Rightarrow$ 6 điểm A, B, C, A', B',

C' cùng nằm trêm một mặt cầu có tâm là H.

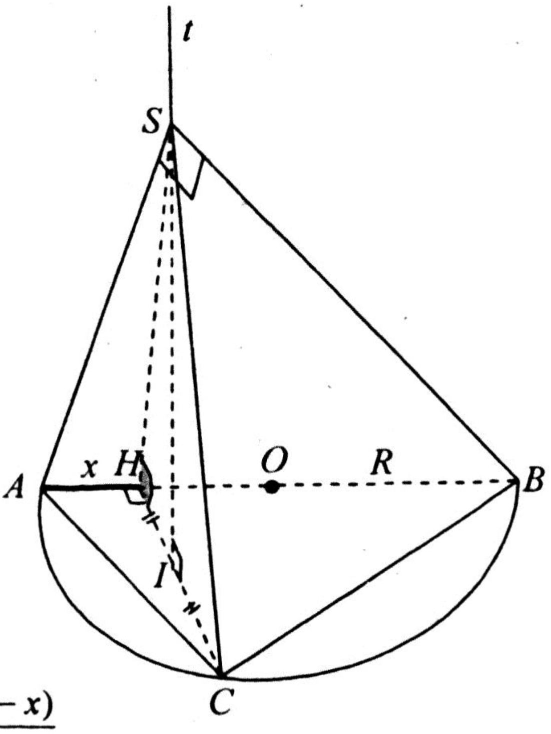
Theo giả thiết bán kính của mặt cầu này là R nghĩa là $HC = R$.

Cũng trong ΔSHC ta có $SH = HC \tan 60^0 = R\sqrt{3}$.

Đó là chiều cao của hình chóp $SABC$. ■

2.24$^{(P)}$ (h.123)

1) Ta có $V = \frac{1}{6}AB.CH.SI = \frac{1}{3}R.CH.SI$. (1)



Hình 123

Ta có :

- $\begin{cases} SI \perp (ABC) \\ IH = IC \end{cases} \Rightarrow SH = SC$ (2)
- $\begin{cases} SI \perp (ABC) \\ IH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp AB.$ (3)

(Định lý 3 đường vuông góc)

Trong các tam giác vuông SAB và CAB ta có

$SH^2 = CH^2 = AH.AB = x(2R - x)$

$\Rightarrow SH = CH = \sqrt{x(2R-x)}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra ΔSHC là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{SHC} = 60^0$ và $SI = \frac{CH\sqrt{3}}{2}$. (5)

Thay (4), (5) vào (1) có

$$V = \frac{R}{3}.\frac{CH^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{3}.\frac{\sqrt{3}x(2R-x)}{2} = \frac{\sqrt{3}Rx(2R-x)}{6}$$

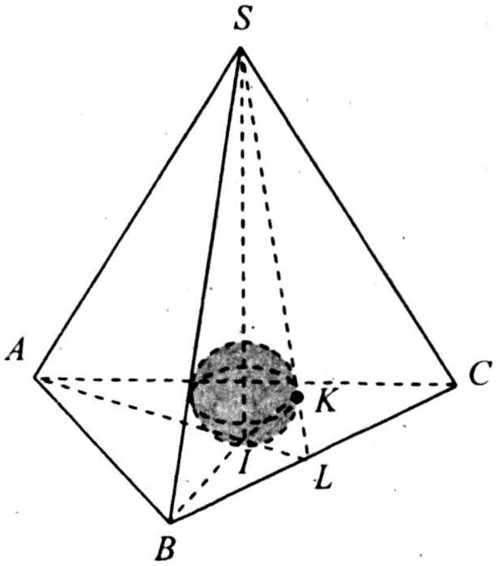
Theo bất đẳng thức Cô-si : $x(2R - x) \le \frac{x + 2R - x}{2} = R$, dấu đẳng thức có khi $x = 2R - x \Leftrightarrow x = R$

Suy ra $\max V = \frac{R^3\sqrt{3}}{6}$, ứng với $x = R$.■

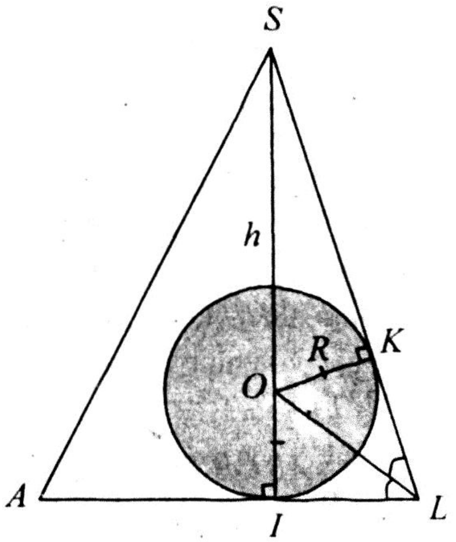
2) Rõ ràng $\widehat{SHC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (CAB).Theo (5): $\widehat{SHC} = 60^0$ nên (SAB) là mặt phẳng cố định $\Rightarrow$ Đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính AB ngoại tiếp ΔSAB là một đường tròn cố định $\Rightarrow$ Trục của $(\mathscr{C})$ là đường thẳng cố định. Đó là đường thẳng qua trung điểm O của AB và vuông góc với mặt phẳng(SAB). Cố nhiên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SIAB$ thuộc trục của $(\mathscr{C})$

C biến thiên trên đường tròn đã cho thì tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ luôn thuôc đường thẳng cố định – đó là trục của đường tròn $(\mathscr{C})$.■

2.25(h.124a, h.124b).



Hình 124*a*



Hình 124*b*

Gọi $SABC$ là hình chóp tam giác đều ngoại tiếp hình cầu tâm O bán kính R đã cho.

Kẻ SO cắt mặt phẳng (ABC) tại I, thì I là tiếp điểm của mặt cầu (O) với mặt phẳng (ABC) và SI là đường cao của hình chóp $SABC$, theo đó $SI = h$. Kẻ AI cắt BC tại L. Kẻ $OK \perp SL$, $K \in SL$. Ta có $OI = OK = R$.

Ta có $S_{xq} = 3s_{\Delta SBC} = 3BL.SL$. (1)

Xét trong mặt phẳng (SAL) ta có (h.65b) :

+ OL là phân giác của $\widehat{SLA}$

+ $SK^2 = SO^2 - OK^2 = (h-R)^2 - R^2 = h(h-2R)$. (2)

+ Tứ giác $OILK$ nội tiếp nên $SK.SL = SO.SI \Rightarrow \sqrt{h(h-2R)}.SL = (h-R)h$

$$\Rightarrow SL = \frac{(h-R)h}{\sqrt{h(h-2R)}} \qquad (3)$$

Trong ΔSIL vuông tại L có $IL^2 = SL^2 - SI^2 = \dfrac{(h-R)^2h^2}{h(h-2R)} - h^2 = \dfrac{h^2R^2}{h(h-2R)}$

$$\Rightarrow IL = \frac{hR}{\sqrt{h(h-2R)}}$$

Do tam giác ABC đều nên $\widehat{IBL} = 30^0$ và $BL = IL\cot 30^0 = \dfrac{IL}{\sqrt{3}} = \dfrac{hR}{\sqrt{3h(h-2R)}}$

Thay (2), (3) vào (1) có :

$$S_{xq} = 3.\frac{hR}{\sqrt{3h(h-2R)}}.\frac{(h-R)h}{\sqrt{h(h-2R)}} = R\sqrt{3}.\frac{h(h-R)}{h-2R} \qquad (4)$$

Rõ ràng S_{xq} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi hàm số $f(h) = \dfrac{h(h-R)}{h-2R}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f(h) = \dfrac{h(h-R)}{h-2R}$, $f'(h) = \dfrac{h^2 - 4Rh + 2R^2}{(h-2R)^2}$, $f'(h) = 0 \overset{h>2R}{\Leftrightarrow} h = R(2+\sqrt{2})$

h	$(2-\sqrt{2})R$		$2R$		$(2+\sqrt{2})R$		$+\infty$
$f'(h)$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(h)$			||	↗		↘	

Bảng biến thiên cho thấy $\max f(h) = f\left((2+\sqrt{2})R\right) = \dfrac{3(2+\sqrt{2})R}{2}$

$\Rightarrow \max S_{xq} = R\sqrt{3}\,\dfrac{3(2+\sqrt{2})R}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}(2+\sqrt{2})R^2}{2}$ ■

2.26 (h.125)

1) Tất cả các cạnh đều tiếp xúc với một mặt cầu nên

$SA + BC = SB + CA = SC + AB$ (1)

Mặt khác tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH nên $\widehat{ISA} = \widehat{ISB} = \widehat{ISC}$

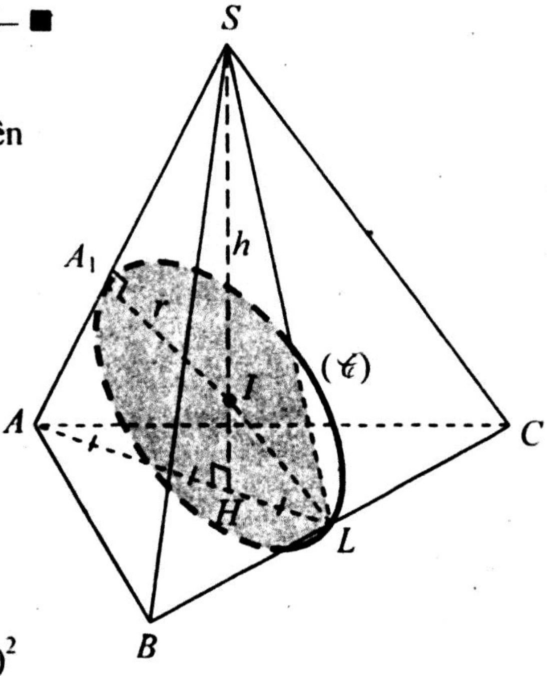
$\Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$

$\Rightarrow SA = SB = SC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AB = BC = CA$.

Từ đó suy ra $SABC$ là hình chóp đều.

2) (h.66) Gọi L là trung điểm BC. Khi đó mặt phẳng (SAL) cắt hình cầu (I) theo đường tròn lớn ($\mathscr{C}$). Rõ ràng ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với SA (gọi tiếp điểm là A_1) và đi qua điểm M.



Hình 125

Tứ giác AA_1IK nội tiếp nên $(SI.SH)^2 = (SA_1.SA)^2$

$\Leftrightarrow 3r^2.h^2 = (SI^2 - IA_1{}^2)(SH^2 + HA^2)$

$\Leftrightarrow 3r^2.h^2 = (3r^2 - r^2)(h^2 + HA^2)$

$\Leftrightarrow 3h^2 = 2(h^2 + HA^2) \Leftrightarrow h^2 = HA^2$ (3)

Gọi giao điểm thứ hai của AL với ($\mathscr{C}$) là K.

Bởi AL là trung tuyến của tam giác đều ABC nên có $AH = 2HL$.

$\Rightarrow HA^2 = 4HL^2 = 4(IL^2 - IH^2) = 4[r^2 - (h - r\sqrt{3})^2] = 4(2hr\sqrt{3} - h^2 - r^2)$

Thay vào (3) có $h^2 = 2.4(2hr\sqrt{3} - h^2 - r^2) \Leftrightarrow 9h^2 - 16rh\sqrt{3} - 16r^2 = 0$

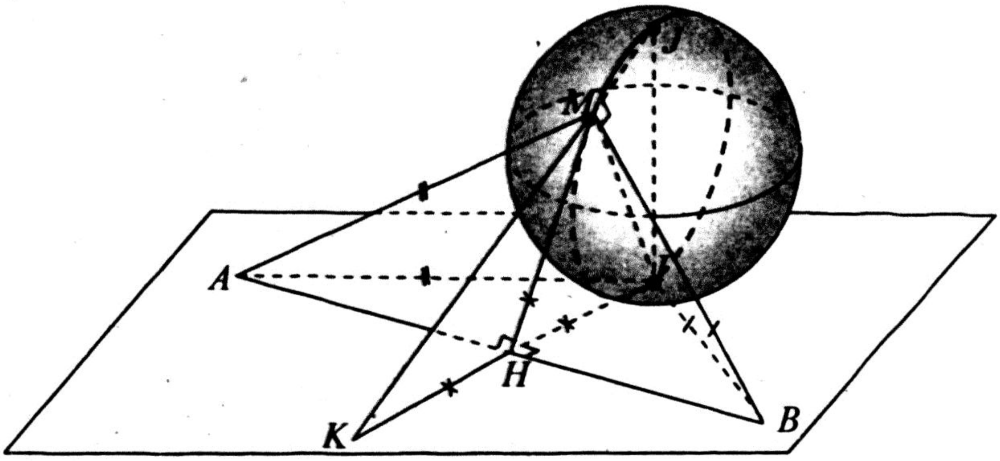
$\overset{h>IS>r}{\Leftrightarrow} \quad h = \dfrac{4r}{\sqrt{3}}$. ■

2.27.(h.126).**1)** Ta có $\begin{cases} AM = AI \\ BM = BI \\ MJ \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta AMI = \Delta BMI \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AIB}$. ■

2) Ta có K đối xứng với I qua AB nên $IK \perp AB$. Kẻ đường kính IJ thì $IJ \perp (P)$ nên $IJ \perp AB$. Từ đó suy ra $AB \perp (IJK)$. (1)

Lại có $\begin{cases} AM = AI \\ BM = BI \\ AB \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta AMB = \Delta BIB \Rightarrow HM = MI \Rightarrow \Delta AMH = \Delta AIH$

$\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{AMI} = 90^0$ hay $MH \perp AB \Rightarrow M \in (IJK)$. Vậy 4 điểm I, J, K, M cùng nằm trong một mặt phẳng. Đó là mặt phẳng qua I và vuông góc với AB.

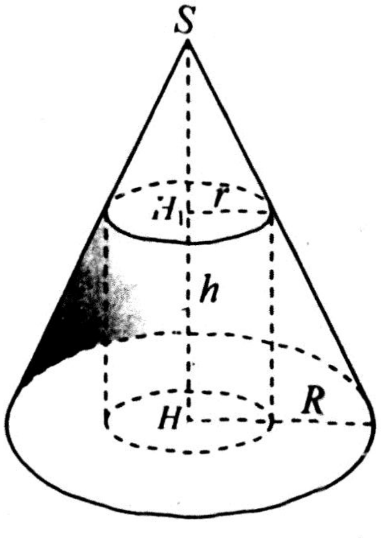


Hình 126

Theo trên $HM = MI = HK \Rightarrow \Delta MKI$ vuông tại M hay $IM \perp MK$ (2)

Mặt khác $IM \perp MJ$. Từ đây có $\widehat{JMK} = 180^0$ nên J, M, K thẳng hàng (do chúng đã đồng phẳng). Nói cách khác, đường thẳng MK luôn đi qua điểm J cố định thuộc mặt cầu đã cho.■

Lời nhắn: Các bạn liên hệ với bài tập 2.2



Hình 127

2.28 (h.127) Ta có $\frac{SH_1}{SH} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{SH_1}{4R} = \frac{r}{R}$

$\Rightarrow SH_1 = 4r$, $h = HH_1 = 4(R - r)$. ■

1) Diện tích toàn phần của hình trụ là

$S_{tp} = 2\pi r(r + h) = 2\pi r[r + 4(R - r)]$

$\Rightarrow S_{tp} = 2\pi r(4R - 3r)$.■

2) Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$2\pi r(4R - 3r) = \frac{\pi}{3}.\frac{3r(4R - 3r)}{2}$$

$$\leq \frac{\pi}{3}(3r + 4R - 3r)^2 = \frac{16\pi R^2}{3}$$

Dấu đẳng thức có khi $3r = 4R - 3r \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R$

Vậy $\max S_{tp} = \frac{16\pi R^2}{3}$ đạt được khi $r = \frac{2}{3}R$, $h = 4(R - r) = \frac{4}{3}R$.■

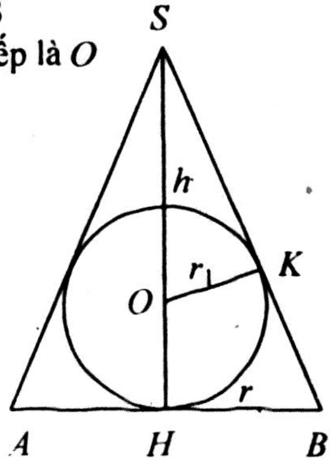
2.29. (h.128). Giả sử trục của hình nón là SH, tâm hình cầu nội tiếp là O

Gọi (α) là mặt phẳng qua trục của hình nón. Khi đó (α) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, cắt mặt cầu theo đường tròn lớn và $O \in SH$, đường tròn này nội tiếp ΔSAB.

Kẻ $OK \perp SB$, $K \in SB$. Từ các tam giác vuông đồng dạng SOK và SHB ta có

$$\frac{OK}{HB} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{h - r_1}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\Rightarrow r_1\sqrt{h^2 + r^2} = r(h - r_1) \Rightarrow r_1 = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$$



Hình 128

1) Thể tích hình nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Thể tích khối cầu nội tiếp nón là $V_2 = \frac{4\pi}{3} r_1^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}\right)^3_1$

Vậy nên $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{4\pi}{3}\left(\frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}\right)^3_1 = \frac{\left(r+\sqrt{h^2+r^2}\right)^3}{4rh^2}$.■

2) Đặt $h = r^2.t$, $t > 0$ ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(r+r\sqrt{1+t}\right)^3}{4r^3 t} = \frac{\left(1+\sqrt{1+t}\right)^3}{4t}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\left(1+\sqrt{1+t}\right)^3}{4t}$ trên $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{\left(1+\sqrt{1+t}\right)^2[t-2(1+\sqrt{1+t})]}{4.2t^2\sqrt{1+t}} = \frac{\left(1+\sqrt{1+t}\right)^2(1+\sqrt{1+t})(\sqrt{1+t}-3)}{4.2t^2\sqrt{1+t}}$$

Rõ ràng $\begin{cases} f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+t} = 3 \Leftrightarrow t = 8 \\ f'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 8 \\ f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 8 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{t>0} f(t) = f(8) = 2.$

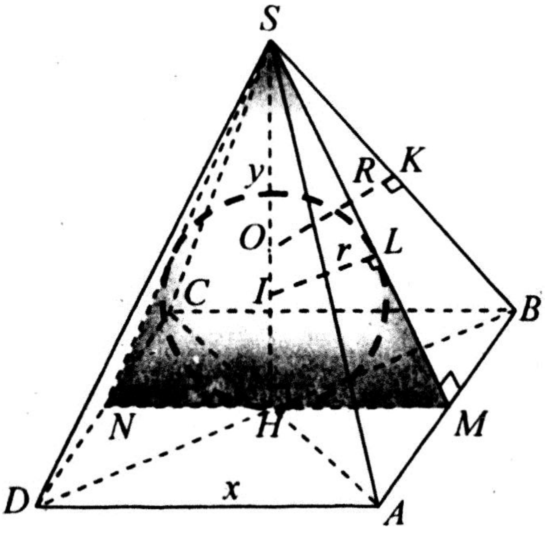
Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng 2.■

2.30.(h.129) Gọi x, y theo thứ tự là độ dài cạnh đáy và chiều cao của hình chóp tứ giác đều $SABCD$. Lại gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp.

Trong mặt phẳng (SHB), kẻ đường trung trực của SB cắt SK tại O.

Khi đó $OK = R$.

Tứ giác $OHBK$ nội tiếp nên



Hình 129

$$SH.SO = SB.SK \Leftrightarrow SO.SH = \frac{SB^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow SH^2.SO^2 = \frac{SB^4}{4} \Leftrightarrow y^2\left(OK^2 + \frac{SB^2}{4}\right) = \frac{SB^4}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2.R^2 = SB^4 - y^2SB^2 \Leftrightarrow 4y^2.R^2 = SB^2(SB^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow 4y^2.R^2 = \left(y^2 + \frac{x^2}{2}\right)\left(y^2 + \frac{x^2}{2} - y^2\right) \Leftrightarrow 4y^2.R^2 = \frac{x^2(x^2+2y^2)}{4} \Leftrightarrow R = \frac{x\sqrt{x^2+2y^2}}{4y}$$

Gọi M là trung điểm AB.Trong mặt phẳng (SHM), kẻ đường phân giác của góc $\widehat{SMH}$ SH tại I, $I \in SH$. Từ I kẻ $IL \perp SM$, $L \in SM$, Khi đó $IL = r$.

Từ các tam giác vuông đồng dạng SOK và SHB ta có

$$\frac{IL}{HM} = \frac{SI}{SM} \Rightarrow \frac{r}{\frac{x}{2}} = \frac{y-r}{\sqrt{y^2+\frac{x^2}{4}}} \Rightarrow \frac{2r}{x} = \frac{y-r}{2\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$\Rightarrow 4r\sqrt{x^2+4y^2} = x(y-r) \Rightarrow 4r(x+\sqrt{x^2+4y^2}) = xy \Rightarrow r = \frac{xy}{x+\sqrt{x^2+4y^2}}$$

Vậy nên $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left[\frac{(x^2+2y^2)(x+\sqrt{x^2+4y^2})}{4xy^2}\right]^3$. Rõ ràng $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{R}{r} = \frac{(x^2+2y^2)(x+\sqrt{x^2+4y^2})}{4xy^2}{}_{\Delta ABC}$

Đặt $2y = x\tan a$, $a \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{x^2(1+\frac{\tan^2 a}{2})(x+x\sqrt{1+\tan^2 a})}{4x^3\tan^2 a}$

$$= \frac{(2+\tan^2 a)(1+\frac{1}{\cos a})}{2\tan^2 a} = \frac{(1+\frac{1}{\cos^2 a})(1+\frac{1}{\cos a})}{2\tan^2 a} = \frac{(1+\cos^2 a)(1+\cos a)}{2\cos a(1-\cos^2 a)}$$

$= \frac{1+\cos^2 a}{2\cos a(1-\cos a)}$. Đặt tiếp $\cos a = t$, $t \in (0; 1)$ ta có $\frac{R}{r} = \frac{1+t^2}{2t(1-t)}$

Vậy $\frac{R}{r}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi hàm số $f(t) = \frac{1+t^2}{2t(1-t)}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; 1)$

Ta có $f'(t) = \frac{2t(t-t^2)-(1-2t)(1+t^2)}{2t^2(1-t)^2} = \frac{t^2+2t-1}{2t^2(1-t)^2} = \frac{(t+1+\sqrt{2})(t+1-\sqrt{2})}{2t^2(1-t)^2}$

Để ý $\frac{t+1+\sqrt{2}}{2t^2(1-t)^2} > 0$, với t $\in (0; 1)$ suy ra $\begin{cases} f'(t) = 0 \Leftrightarrow t+1-\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}-1 \\ f'(t) < 0 \Leftrightarrow t+1-\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow t < \sqrt{2}-1 \\ f'(t) > 0 \Leftrightarrow t+1-\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow t > \sqrt{2}-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \min_{(0;1)} f(t) = f(\sqrt{2}-1) = \frac{1+(\sqrt{2}-1)^2}{2(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với $t = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \cos^2 t = 3-2\sqrt{2} \Rightarrow 1+\tan^2 t = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \tan^2 t = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - 1 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1) \Rightarrow \tan t = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$\Rightarrow 2y = x\sqrt{2(\sqrt{2}+1)} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$$

Vậy khi $y = \frac{x}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ thì $\frac{V_1}{V_2}$ có giá trị nhỏ nhất.■

Bài tập trắc nghiệm

22.1$^{(P)}$ *Trả lời trắc nghiệm* **D.** *Lời giải tự luận*

- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có thể không nằm trên đường cao. Do vậy *A* không phải là khẳng định luôn đúng.
- Hình thoi không có đường tròn ngoại tiếp nên B là khẳngdịnh sai.
- Chỉ cần đáy nội tiếp đường tròn, không nhất thiết hai đường chéo của đáy bằng nhau. C là khẳng định sai.

22.2$^{(P)}$ *Trả lời trắc nghiệm* :**A.** *Lời giải tự luận*

Diện tích xung quanh của hình trụ được tính bởi công thức $S_{xq} = 2\pi Rh$, với

$h = \dfrac{1}{11 + 22\sin 10^0}$, $R = \dfrac{1}{\pi(1 - 2\sin 10^0)\cos 10^0}$ ta có

$$S_{xq} = 2\pi.\frac{1}{\pi(1 - 2\sin 10^0)\cos 10^0}.\frac{1}{11 + 22\sin 10^0}$$

$$= \frac{4}{11(1 + 2\sin 10^0)(1 - 2\sin 10^0)\cos 10^0} = \frac{4}{11(1 - 4\sin^2 10^0)\cos 10^0}$$

$$= \frac{4}{11\cos 10^0(4\cos^2 10^0 - 3)} = \frac{2}{11\cos 30^0} = \frac{4}{11}. ■$$

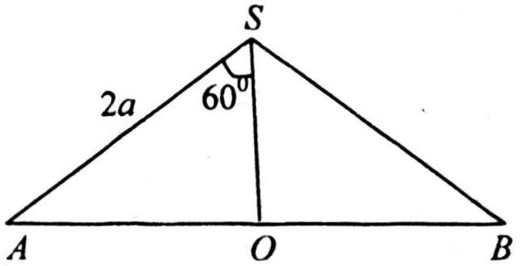
22.3$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* :**C.** *Lời giải tự luận*

Công thức tính thể tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, Với $\dfrac{\pi}{3}\sin^3 a \Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi}{3}\sin^3 a$

$\Rightarrow R^3 = \sin^3 a = 3\sin a - \sin 3a \Rightarrow R = \sqrt[3]{3\sin a - \sin 3a}$.■

22.4. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận (h.130).



Hình 130

Gọi thiết diện qua trục là *SAB, S* là đỉnh, *AB* là đường kính đáy, *O* là tâm đáy. Theo giả thiết $SA = 2a$, $\widehat{ASO} = 60^0$. Trong tam giác *SAO* vuông tại *O*, $\widehat{ASO} = 60^0$ ta có $OA = SA\sin 60^0 = a\sin 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

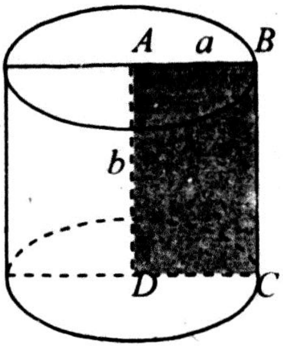
Gọi S_{tp}, $S_đ$, S_{xq} theo thứ tự là diện tích toàn phần, diện tích đáy, diện tích xung quay của hình nón ta có :

$$S_{tp} = S_đ + S_{xq} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l) = \pi OA(OA + SA)$$
$$= \pi.a\sqrt{3}(a\sqrt{3} + 2a) = \pi a^2(3 + 2\sqrt{3})$$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi a^2(3 + 2\sqrt{3})$.■

22.5. *Trả lời trắc nghiệm* : B

Lời giải tự luận (h.131)



Hình 131

Khi quay cạnh *AD*, hình chữ nhật *ABCD* tạo thành một hình trụ có chiều cao bằng

AD = *b*, bán kính đáy bằng *AB* = *a*.

Thể tích khối trụ ấy là $V = \pi R^2 h = \pi a^2 b$

22.6. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận.

Gọi *d* là độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật.

Ta có $d^2 = a^2 + (2a)^2 + (4a)^2 = 21a^2$.

Gọi *R, V* theo thứ tự là bán kính và thể tích hình cầu ngoại tiếp hình hội chữ nhật cho. Rõ ràng $d = 2R \Leftrightarrow d^2 = 4R^2$. Thể tích khối cầu là

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^2 = \dfrac{1}{3}\pi d^2 = \dfrac{1}{3}21\pi a^2 = 7\pi a^2$. Vậy $V = 7\pi a^2$ (đvtt).■

Lời bình: Trong công thức $V = \frac{4}{3}\pi R^2$, để thể tích hình cầu cần biết R^2, không nhất thiết tìm giá trị của R.

22.7$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận(h.132)

Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Khi quay cạnh BC, miền tam giác vuông ABC tạo thành hai hình nón úp vào nhau chung một mặt đáy là hình tròn do điểm A vẽ nên. Các đường cao tương ứng là AH, BH.

Thể tích khối nón đỉnh B là $V_B = \pi.HA^2.BH^2$

Thể tích khối nón đỉnh C là $V_B = \pi.HA^2.CH^2$.

Thể tích khối tròn xoay phải tính là

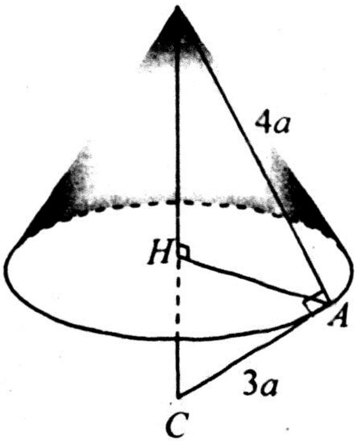
$V = V_B + V_C = \pi.HA^2(BH + CH) = \pi.HA^2.BC$ (1)

Trong tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4a^2 + 3a^2 = 5a^2 \Rightarrow BC = 5a$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5^2}{12a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{144a^2}{25}.$$

Thay vào (1) có $V = \pi.\frac{144a^2}{25}.5a = \frac{144\pi a^3}{5}$. ■



Hình 132

22.8.$^{(P)}$ *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.133).

Gọi I, r, R theo thứ tự là tâm và bán kính của của thiết diện, bán kính của mặt cầu, A là một điểm trên đường tròn thiết diện.

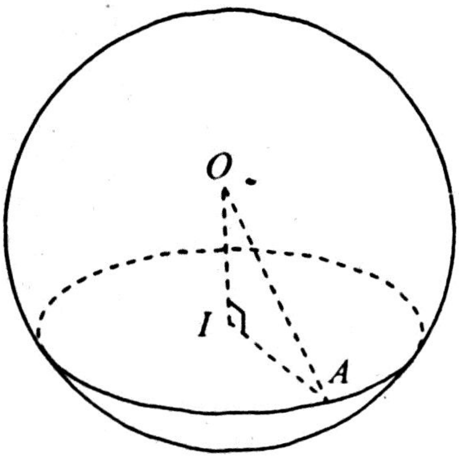
Theo giả thiết :

− Chu vi *hình tròn lớn* của hình cầu bằng 10π nghĩa là $2\pi R = 10\pi \Leftrightarrow R = 5$

− Thiết diện có diện tích bằng 9π nghĩa là $\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r = 3$

Trong tam giác OIA vuông tại I có $OI^2 = OA^2 - IA = 5^2 - 3^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow OI = 4$. Đó là khoảng khoảng cách từ tâm O đến (P). ■



Hình 133

22.9$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận*.(h.134)

Gọi thiết diện qua trục là SAB, S là đỉnh, AB là đường kính đáy, O là tâm đáy. Theo giả thiết $SO = a$, $\widehat{ASO} = 60^0$. Trong tam giác SAO vuông tại O, $\widehat{ASO} = 60^0$ ta có

$OA = OA\tan 60^0 = a\tan 60^0 = a\sqrt{3}$, $SA = \frac{SO}{\cos 60^0} = 2a$

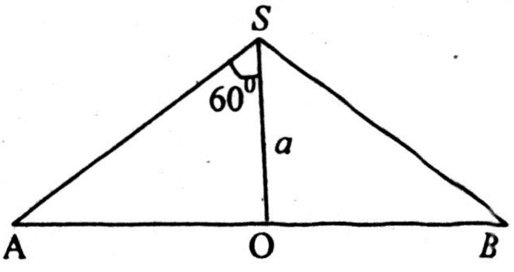
Gọi S_{tp}, S_d, S_{xq} theo thứ tự là diện tích toàn phần, diện tích đáy, diện tích xung quay của hình nón ta có :

$S_{tp} = S_d + S_{xq} = \pi R^2 + \pi Rl$

$= \pi R(R + l) = \pi OA(OA + SA)$

$= \pi.a\sqrt{3}(a\sqrt{3} + 2a) = \pi a^2(3 + 2\sqrt{3})$

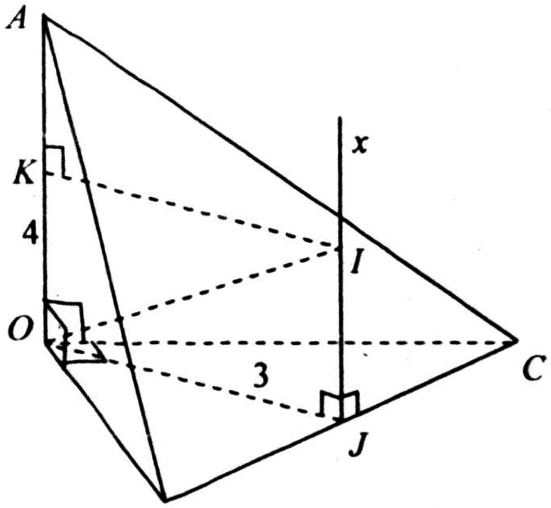
Vậy diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi a^2(3 + 2\sqrt{3})$. ■



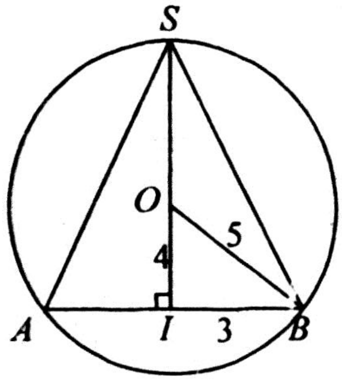
Hình 134

22.10$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận* (h.135)

- Lấy J là trung điểm BC, suy ra
  $OJ = 3$ (trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền)
- Kẻ tia $Jx \perp (OBC)$, tia Jx và điểm A cùng một phía so với mặt phẳng (ABC).
- Lấy điểm I thuộc tia Jx sao cho $IJ = \frac{OA}{2} = 4$.
- Bạn dễ dàng chứng minh I là tâm mặt ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Từ đó có $R = IO$.
- Trong tam giác OIJ vuông tại J có $IO^2 = IJ^2 + JO^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$
- Vậy $R = 5$ là bán kính đường tròn lớn của mặt cầu.



Hình 135



Hình 136

22.11$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận* (h.136 ở trên)

Gọi O, I, S theo thứ tự lần lượt là tâm hình cầu,tâm đáy và đỉnh của hình nón. Xét SAB là một thiết diện qua trục hình nón. Theo giả thiết ta có

$OB = R = 5, SI = 9, OI = SI - SO = 9 - 5 = 4$.

Trong tam giác OIB vuông tại I ta có $IB^2 = OB^2 - OI^2 = 5^2 - 4^2 = 9$.

Thể tích khối nón nội tiếp khối cầu là $V_n = \frac{\pi.OB^2.SI}{3} = \frac{\pi.3^2.9}{3} = 27\pi$.

Thể tích khối khối cầu là $V_c = \frac{4\pi OB^3}{3} = \frac{4\pi.5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}$.

Tỉ số giữa thể tích khối nón và khối cầu là : $\frac{V_n}{V_c} = 27\pi.\frac{3}{500\pi} = \frac{81}{500}$.■

22.12$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận* (h.18 ở trên)

Gọi α là góc giữa đáy và đường sinh.

Ta có $\tan\alpha = \frac{h}{R} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0$.■

22.13$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận* .

Gọi R, h theo thứ tự là bán kính đáy và đường rsinh của hình nón.

Từ giả thiết suy ra $R = \frac{\tan 20^0}{\cot 50^0} = \tan 20^0 \tan 40^0$, $l = \frac{\tan 80^0}{\pi}$.

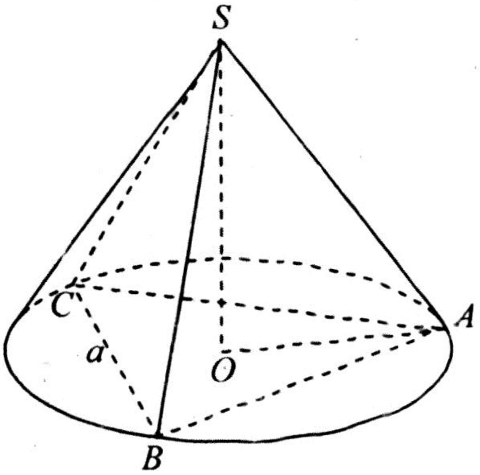
Do vậy diện tích xug quah của hình nón là

$$V = \pi R l = \pi.\tan 20^0 \tan 40^0 \frac{\tan 80^0}{\pi} = \tan 20^0 \tan(60^0 - 20^0)\tan(60^0 + 20^0)$$

$$= \tan 60^0 = \sqrt{3}\ .■$$

22.14.*Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận (h.137)



Hình 137

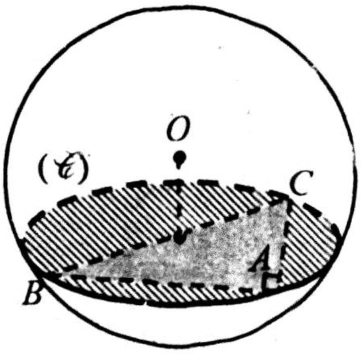
Xét hình nón đỉnh S ngoại tiếp tứ diện đều $SABC$. Gọi O là tâm đáy hình nón. Khi đó O cũng là trọng tâm tam giác đều ABC.

Ta có $OA = \dfrac{AB}{2\sin 60^0} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Rõ ràng SA cũng là một đường sinh của hình nón. Diện tích xung quanh hình nón phải tìm là $S_{xq} = \pi.OA.SA = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.■

22.15$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận (h.138)



Hình 138

Xét mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn $(\mathscr{C})$

- Nếu BC là một đường kính của $(\mathscr{C})$ thì với mọi $A \in (\mathscr{C})$ ta luôn có $\widehat{BAC} = 90^0$.

Điều này không phụ thuộc vị trí của O so với (α).

Do vậy *A, B, C* là khẳng định sai.

- Trong khi đó I là trung điểm $BC \Rightarrow I$ là tâm của $(\mathscr{C}) \Rightarrow OI \perp (ABC)$. Vậy D là *khẳng định đúng.*

22.16. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận*

Thấy rằng hình chóp có đáy là một hình thoi không có mặt cầu ngoại tiếp nên B là một khẳng định sai. Các khẳng định còn lại đều đúng.

(Nhắc lại: *Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đa giác đáy có đường tròn ngoại tiếp*).

22.17$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận*

Gọi I là trung điểm AB. Với mọi M trong không gian ta đều có

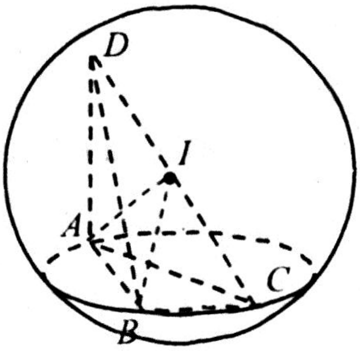
$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$. Bởi vậy $MA^2 + MB^2 \le a \Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} \le a$

$\Leftrightarrow MI \le \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{2} - \dfrac{AB^2}{4}} \Leftrightarrow (\mathscr{H})$ là khối cầu tâm I, bán kính $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{2} - \dfrac{AB^2}{4}}$.

Vậy D là một khẳng định đúng. Các khẳng định còn lại đều sai.

22.18. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận (h.139)



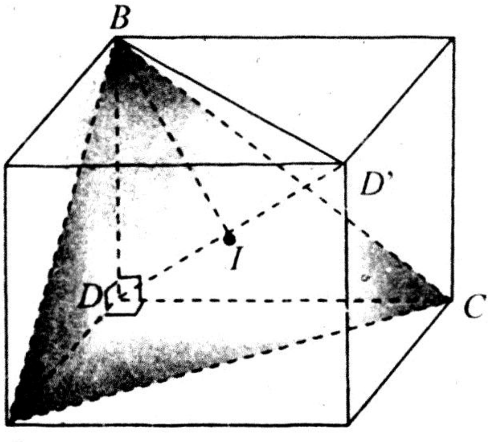
Hình 139

Từ giả thiết $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = 90^0$ suy ra CD là đường kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện $DABC$. Ta có

$DC^2 = DA^2 + AC^2 = b^2 + (AB^2 + BC^2)$

$= b^2 + (c^2 + c^2) \Rightarrow DC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Do vậy $R = \frac{CD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.■



Hình 140

22.19. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận : (h.140)

Dựng hình chữ nhật sao cho A, B, C, D là 4 đỉnh của nó.

Do $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'}$ nên D' là một đường chéo của hình hộp chữ nhật ấy. Cố nhiên D' cũng thuộc mặt cầu đi qua A, B, C, D.

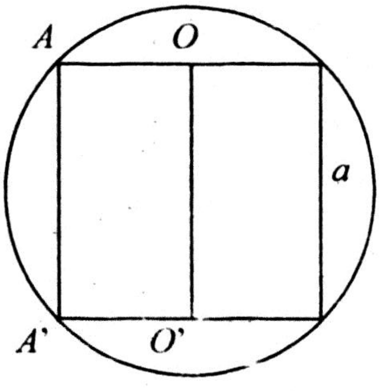
Gọi I là trung điểm của DD'.

Tam giác DBD' vuông tại B nên

$IB = ID = ID'$

Tương tự cũng có $IA = IC = ID$.

Từ các kết quả trên suy ra DD' là đường kính của mặt cầu đi qua A, B, C, D.



Hình 141

22.20. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận : (h.141)

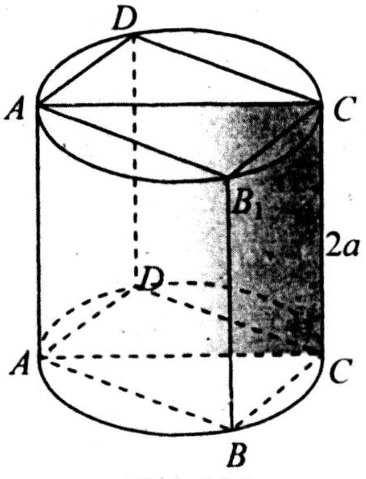
Gọi cạnh hình vuông thiết diện là a, thế thì chiều cao của hình trụ là $h = a$ và bán kính đáy của hình trụ là $R = \frac{a}{2}$.

Ta có diện tích xung quanh của một khối trụ là

$S = 2\pi Rh = 2\pi a.\frac{a}{2} = \pi a^2 = 4\pi \Rightarrow a = 2$

Thể tích của khối trụ ấy là

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi.1^3 = \frac{4\pi}{3}$.■



Hình 142

22.21. *Trả lời trắc nghiệm* : **C**

Lời giải tự luận : (h.142)

Gọi $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ đã cho. Khi đó ACC_1A_1 là thiết diện qua trục của ình trụ.

Theo giả thiết $AA_1 = AC = BD = 2a$ và $AC \perp BD$. Do vậy :

Thể tích lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ bằng

$V = s_{ABCD}.AA_1 = \frac{1}{2}AC.BD.AA_1 = a.2a.2a = 4a^3$.■

22.22. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận : (h.143)

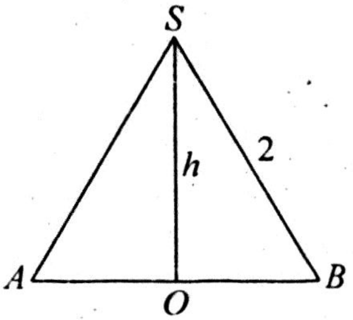
Xét một thiết diện qua trục của hình nón là ΔSAB. Từ giả thiết suy ra $SA = 2$, $OA = 1$.

Diện tích toàn phần của hình nón là

$S_{nón} = \pi.OA(OA + SA) = \pi.1(1 + 2) = 3\pi$

Diện tích hình cầu bán kính R là $S_{cầu} = 4\pi R^2$

Theo bài toán $S_{cầu} = S_{nón} \Rightarrow 4\pi R^2 = 3\pi \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.■



Hình 143

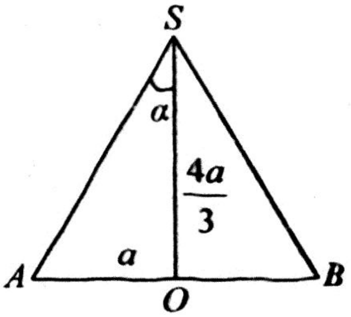
22.23. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận : (h.144)

Xét một thiết diện qua trục của hình nón là ΔSAB. Từ giả thiết suy ra $OA = a$, $SO = \frac{4a}{3}$.

$\widehat{ASO} = \alpha$. Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $\cot\alpha = \frac{SO}{OA} = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \frac{25}{9}$

hay $\frac{1}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$.■



Hình 144

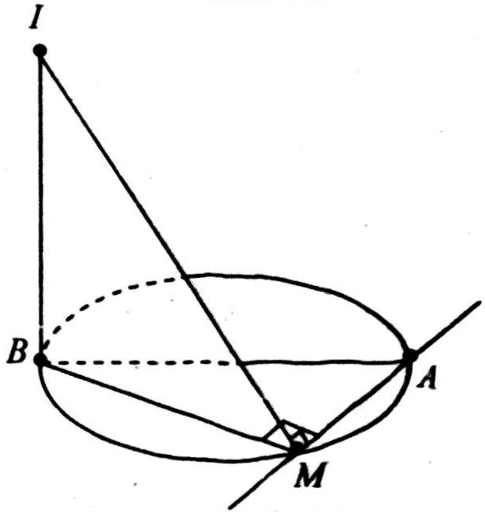
22.24. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận : (h.145)

Gọi B, M theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P), trên đường thẳng (d). Cố nhiên B là điểm cố định

Do $IM \perp MA \Rightarrow BM \perp MA$ (định lý ba đường vuông góc)

Tóm lại khi (d) quanh quanh A thì M luôn nhìn hai điểm cố dịnh A và B dưới một góc vuông nên M thuộc đường tròn đường kính AB.■



Hình 145

Bảng kết quả câu hỏi
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
22.1	D	22.7	C	22.13	C	22.19	D
22.2	A	22.8	A	22.14	A	22.20	C
22.3	C	22.9	D	22.15	D	22.21	C
22.4	D	22.10	B	22.16	B	22.22	A
22.5	B	22.11	B	22.17	D	22.23	A
22.6	C	22.12	D	22.18	B	22.24	D

BÀI TẬP 3

3.1$^{(p)}$. **1)** Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cot 2x + \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 60^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$. ■

2) Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos x - (\cos 17^0 \cos 13^0 - \sin 17^0 \sin 13^0) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \cos(17^0 + 13^0) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos 30^0 \Leftrightarrow x = \pm 30^0 + k360^0$. ■

3.2. 1) $\begin{cases} \vec{u} = (-1;2;3) \\ \vec{v} = (12;-3;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{u} - \vec{v} = (-1 - 12; 2 + 3; 3 - 0) = (-13; 5; 3)$.

2) $\begin{cases} \vec{u} = (-1;2;3) \\ \vec{v} = (12;-3;0) \\ \vec{w} = (1;2;-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (-1;2;3) \\ 2\vec{v} = (24;-6;0) \\ -3\vec{w} = (-3;-6;6) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = (20;-10,9)$.

3) $\begin{cases} \vec{u} = (-1;2;3) \\ \vec{v} = (12;-3;0) \\ \vec{w} = (1:2;-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\vec{u} = (-3;6;9) \\ \frac{1}{3}\vec{v} = (4;-1;0) \\ 2\vec{w} = (2;4;-4) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = 3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w} = (3;9;5)$.

4) $\begin{cases} \vec{u} = (-1;2;3) \\ \vec{v} = (12;-3;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = -1.12 + 2(-3) + 3.0 = -18.$

5) $\begin{cases} \vec{u} = (-1;2;3) \\ \vec{v} = (12;-3;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} \right) = (2;\ 36;\ -21)$

3.3$^{(P)}$.1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;\ 1;\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (0;\ 1;\ -1)$.

Thấy rằng $1 : 1 : 3 \neq 0 : 1 : -1 \Rightarrow$ Ba điểm A, B, C không thẳng hàng. ■

2) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 1;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = (3;\ -3;\ -6)$. Thấy rằng $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, B, C thẳng hàng. ■

3) Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;\ 5;\ -2)$, $\overrightarrow{AC} = (0;\ -10;\ 4)$. Thấy rằng

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} \right) = (0;0;0) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, B, C thẳng hàng.■

3.4. 1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 1;\ -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;\ 4;\ 3)$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (11;5;-3)$$

Tính diện tích tam giác ABC bằng $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{155}$. ■

2) Gọi $D = (x;\ y;\ z)$ là một điểm trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$. Ta có $\overrightarrow{CD} = (x - 1;\ y - 3;\ z - 3)$, $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 3 = 1 \\ z - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Vậy $D = (0;\ 4;\ 1)$.■

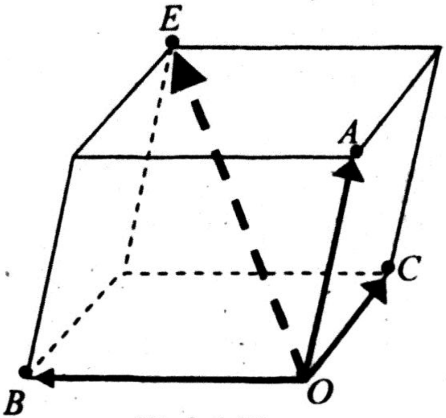
3) (h.146). OE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là OA, OB, OC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (2;-1;0) \\ \overrightarrow{OB} = (1;0;-2) \\ \overrightarrow{OC} = (1;3;3) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (4;\ 2;\ 1)$

$\Rightarrow E = (4;\ 2;\ 1)$. ■



Hình 146

4) Tính thể tích hình hộp dựng trên ba cạnh OA, OB, OC là

$$V = |(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}| = \left\| \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.4 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.1 \right\| = 8 .$$ ■

3.5$^{(P)}$. 1) Ta có $2|\vec{a}| \le |\vec{b}| \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 \le \vec{b}^2 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 16 \le 1 + 4 + 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 9 \le 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. ■

2) Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{b}| \Leftrightarrow x^2.2 + x.3 + 0.2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 12} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 5$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 5.$ ■

3.6.1) Ta có $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{-1.4 + 2.3 + 3.1}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{16+9+1}} = \dfrac{5}{2\sqrt{91}}$

2) Để ý $\vec{u}.\vec{v} = 2.2 + 0.5 - 1.4 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$. ■

3.7$^{(P)}$. 1) Toạ độ trọng tâm G của ΔABC là $\left(\dfrac{7}{3};1;0\right)$

2) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 3; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; 1; 1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3;-4;-2)$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$

Đường cao kẻ từ A của ΔABC là $AH = \dfrac{2s_{\Delta ABC}}{BC} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|}{BC} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{58}}{2}$ ■

3) Gọi $D(x; y; z)$ là một điểm trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$. Ta có :

- $\overrightarrow{DB} = (x-1; y-2; z-1)$, $\overrightarrow{DC} = (x-3; y-1; z+1)$
- Điểm D là chân đường phân giác trong kẻ từ A của ΔABC khi và chỉ khi

$$DB : DC = AB : AC = 3 : 5 \Rightarrow 5\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) = 3(x-3) \\ 5(y-2) = 3(y-1) \\ 5(z-1) = 3(z+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ 2y = 7 \\ 2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{7}{2} \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow D = (-2; \frac{7}{2}; 4).$$

- Do vậy $AD^2 = (-2-1)^2 + (\dfrac{7}{2} - 1)^2 + (4-1)^2 = \dfrac{97}{4} \Rightarrow AD = \dfrac{\sqrt{97}}{2}$ ■

3.8. 1) Ta có $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-8;10;-6)$

2) Ta có $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (14;-5;-6)$

3) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \right) = (18;-6;-40)$

3.9$^{(P)}$. **1)** $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (5; -3; 1)$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 5.5 + 2.(-3) + 1.1 = 20.$■

2) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right) = (0; 0; 0) \Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$ ■

3) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-12; 72; -24)$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = -12.7 + 1.72 - 3.24 = -84$ ■

3.10. **1)** Ta có $\overrightarrow{CA} = (-3; 0; 6)$, $\overrightarrow{CB} = (-8; 0; -4)$, $\overrightarrow{CD} = (-4; 3; 1)$

Để ý $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$ nên tam giác ΔABC vuông tại A.■

2) Ta có $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0; -36; 0)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB})\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{6} |-4.0 - 36.3 + 1.0| = 18$$ ■

3.12.1) Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ $O \equiv A$, tia Ox chứa OA, tia Oy chứa AB, tia Oz cùng hướng với tia CS (h.147). Khi đó ta có :

$A(0; 0; 0)$, $B(0; a\sqrt{2}; 0)$, $C(a\sqrt{2}; 0; 0)$, $S(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$

$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2} \right)$, $N\left(t\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-1); \frac{t\sqrt{2}}{2}; -\frac{t\sqrt{2}}{2} \right)$$

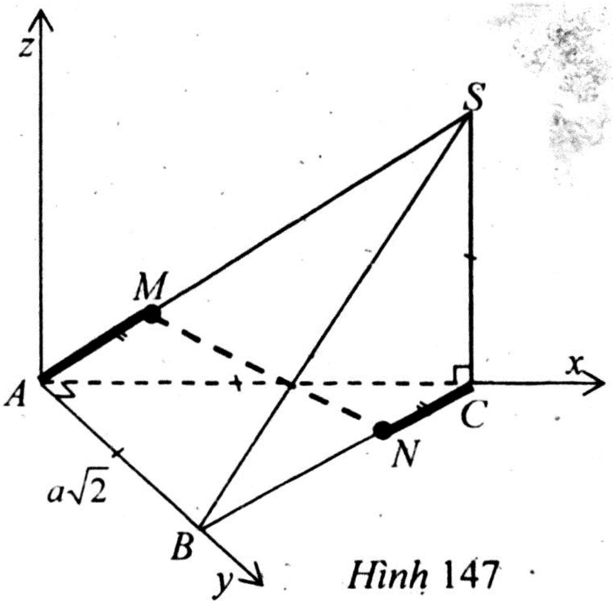
$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a-1)^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}}$$

$$= \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2}$$

$$= \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3} \right)^2 + \frac{2a^2}{3}}$$

$\Rightarrow MN \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$, dấu đẳng thức có khi

$t = \frac{2a}{3}$ (thoả mãn $0 < t < 2a$)



Hình 147

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.■

2) Khi $t = \frac{2a}{3}$ ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{a\sqrt{2}}{3} \right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của SA và BC.■

3.13.*Hướng dẫn* :Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ $O \equiv A$, Tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD, tia Oz chứa tia AA'

1) Làm tương tự câu 1 bài 3.12

2) Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định khi x biến thiên. (mặt phẳng $A'D'BC$).

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'D'BC)$ là $\vec{n} = (0;1;1)$ Bạn có $\vec{n}.\overrightarrow{MN} = 0$ với mọi $x\ (0\ ; a\sqrt{2}\ ) \Rightarrow MN // (A'D'BC)$.■

3) Làm tương tự câu 2 bài 3.12. Và ta còn thấy $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{MN} \Rightarrow MN // A'C$.■

3.13.(h.148).**1)** Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ $O \equiv A$, Tia Ox chứa AD, tia Oy chứa AB, tia Oz chứa tia AA'. Khi đó :

$A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $A'(0;\ 0;\ 1)$, $B'(0;\ 1;\ 1)$, $C'(1;\ 1;\ 1)$, $D(1;\ 0;\ 1)$, $D'(1;\ 0;\ 1)$. Suy ra :$I = (\frac{1}{2};0;\ 1)$, $J = (0;\ 1;\ \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{IJ} = (-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2})$,

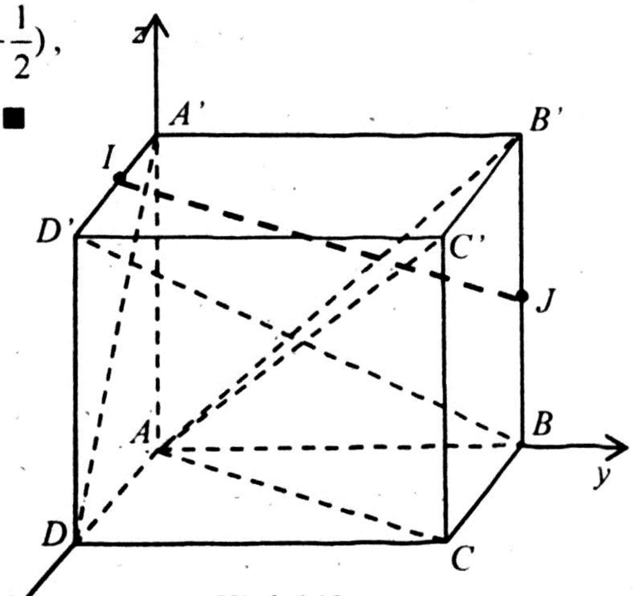
$\overrightarrow{AC'} = (1;\ 1;\ 1)$, $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow IJ \perp AC'$■

2) $IJ = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 1^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.■

3) Ta có $\overrightarrow{A'D} = (1;\ 0;\ -1)$

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{A'D} = -\frac{1}{2}.1 + 1.0 - \frac{1}{2}(-1) = 0$$

$\Rightarrow IJ \perp A'D$ Vậy góc giữa hai đường thẳng IJ và $A'D$ bằng 90^0. ■



Hình 148

3.14. Gọi $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\vec{c} = (c_1;\ c_2;\ c_3)$. Ta có

1) Để ý $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -\ (b_1a_2 - b_2\,a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$

(khi tráo đổi vị trí các dòng cho nhau, định thức đổi dấu). Theo đó

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = -\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\right) = -(\vec{b} \wedge \vec{a}).■$$

2) Từ kết quả câu 1 suy ra $\vec{a} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$.■

Bạn cũng chứng minh bằng cách :

Để ý mọi $k \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{vmatrix} = k(a_1a_2 - a_1a_2) = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$

(các dòng tỉ lệ với nhau thì định thức bằng 0).

Từ đó suy ra $\vec{a} \wedge \vec{a} = (0;0;0) = \vec{0}$

3) Để ý $\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Theo đó

$$\left(\begin{vmatrix} ka_2 & ka_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix} ka_3 & ka_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(k\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};k\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};k\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ kb_2 & kb_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ kb_3 & kb_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ kb_1 & kb_2\end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow (k\vec{a})\wedge\vec{b}=k(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{a}\wedge(k\vec{b}).\ ■$$

4) Để ý $\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ a_1+b_1 & a_2+b_2\end{vmatrix} = c_1(a_2+b_2)-c_2(a_1+b_1)$

$$=(c_1a_2-c_2a_1)+(c_1b_2-c_2b_1)=\begin{vmatrix}c_1&c_2\\a_1&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1&c_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

Theo đó $\left(\begin{vmatrix} c_2 & c_3\\ a_2+b_2 & a_3+b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix} c_3 & c_1\\ a_3+b_3 & a_1+b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ a_1+b_1 & a_2+b_2\end{vmatrix}\right)$

$$=\left(\begin{vmatrix}c_2&c_3\\a_2&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_2&c_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}c_3&c_1\\a_3&a_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_3&c_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}c_1&c_2\\a_1&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1&c_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

$\Leftrightarrow\ \vec{c}\wedge(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\wedge\vec{a}+\vec{c}\wedge\vec{b}$. ■

5) Ta có $a_1\begin{vmatrix}c_2&c_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix}c_3&c_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}c_1&c_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow\ \vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$. ■

6) Ta có $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-\left(|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\alpha\right)^2$

$$=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\alpha\right)=\left(|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\alpha\right)^2=|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2.\ ■$$

BÀI TẬP 4

4.1$^{(P)}$. 1) Xét phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+5=0.$ (1)

***Cách* 1** : Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9.$■

Đó là phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;-3)$, bán kính $R=3$

***Cách* 2** : (1) có dạng $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$

với $A=\dfrac{-2}{-2}=1,\ B=\dfrac{4}{-2}=-2,\ C=\dfrac{6}{-2}=-3,\ D=5.$

Ta có $\Delta=A^2+B^2+C^2-D=(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2-5=9>0$ nên (1) là phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3.$■

2) Trong phương trình $x^2+y^2+z^2+3x-y+7yz-1=0$ có chứa hạng tử $7xy$ nên nó không phải là phương trình mặt cầu. ■

3) Trong phương trình $x^2+2y^2+3z^2+x+2y+3z+4=0$, các hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau nên nó không phải là phương trình mặt cầu. ■

4) $x^2+y^2+z^2-12y+2z+28=0 \Leftrightarrow x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=9$

Đó là phương trình mặt cầu tâm $I(0;6;-1)$, bán kính $R=3.$■

***Cách* 2** : Phương trình $x^2+y^2+z^2-12y+2z+28=0$ (2)

có dạng $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$

với $A=\dfrac{0}{-2}=0,\ B=\dfrac{-12}{-2}=6,\ C=\dfrac{2}{-2}=-1,\ D=28$

Ta có $\Delta = A^2 + B^2 + C^2 - D = 0^2 + 6^2 + (-1)^2 - 28 = 9 > 0$ nên (2) là phương trình mặt cầu tâm $I(0; 6; -1)$, bán kính $R = \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.■

5) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{3} + 1)^2$.

Đó là phương trình mặt cầu tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{3} + 1$

4.2$^{(P)}$. 1) Điều kiện cần để $x^2\log_2 4m + y^{2}{}^{\sqrt{m+3}} + 2mz^2 - 4y + 4z - 3m + 1 = 0$ (1)

là phương trình mặt cầu là $\sqrt{m+3} = 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 4m^2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 3 = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

- Với $m = 1$ ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$

Đó là phương trình mặt cầu có tâm $I(0; 1; -1)$, bán kính $R = 2$.■

2) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 6y + 2z + 4m^2 - 6m + 7 = 0$ (2)

có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

với $A = m$, $B = -3$, $C = 1$, $D = 4m^2 - 6m + 7$.

Ta có $\Delta = A^2 + B^2 + C^2 - D = m^2 + (-3)^2 + 1^2 - (4m^2 - 6m + 7)$

$= -3(m - 1)^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Không có giá trị nào của m để (2) là phương trình mặt cầu.■

4.3$^{(P)}$. Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2x\sqrt{3\cos a} - 12y + 4\cos^3 a + 7 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3\cos a})^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2 - (4\cos^3 a - 3\cos a)$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3\cos a})^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2 - \cos 3a$

Đó là phương trình của mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{2 - \cos 3a}$

Rõ ràng $R \ge 1$, dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} \cos a \ge 0 \\ \cos 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos a \ge 0 \\ a = k120^0 \end{cases} \Leftrightarrow a = k360^0$

Bởi $a \in [0; 90^0] \Rightarrow a = 0^0$. Đó là giá trị phải tìm của a. Khi đó $\min\limits_{a\in[0^0;90^0]} R = 1$.■

(*Nhắc lại* : $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.)

4.4$^{(P)}$. Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - \dfrac{2z}{\sin\alpha} + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 = \cot^2\alpha \qquad (1)$$

- (1) là phương trình mặt cầu có bán kính bằng $\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\alpha = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. Bởi $\alpha \in (0; \dfrac{\pi}{2})$ nên $\dfrac{\pi}{6}$ là giá trị phải tìm của α.■

(Nhắc lại : $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$)

4.5$^{(P)}$. Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4x\sqrt{a} - 2z + 5a - 4\sqrt{a - 1} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{a})^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4 + 4\sqrt{a - 1} - a$ (1)

- (1) là phương trình mặt cầu có bán kính không bé hơn 7 khi và chỉ khi

$4+4\sqrt{a-1}-a\geq 7 \Leftrightarrow (a-1)-4\sqrt{a-1}+4\leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a-1}-2)^2\leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a-1}=2 \Leftrightarrow a=5.$■

4.6$^{(P)}$. Phương trình mặt cầu ($\mathscr{C}$) có tâm là $I=(1;-1;0)$ có bán kính bằng R là

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=R^2 \qquad (1)$$

1) Với $R=2$ ta có $(1)\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$

2) ($\mathscr{C}$) đi qua điểm $A(0;1;2) \Leftrightarrow (0-1)^2+(1-1)^2+2^2=R^2 \Rightarrow R^2=5$

Thay vào (1) ta có $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=5$. Đó là phương trình mặt cầu có tâm là $I=(1;-1;0)$ và đi qua điểm $A(0;1;2)$. ■

4.7$^{(P)}$. **1)** Ta có $\overrightarrow{DA}=(0;2;-1)$, $\overrightarrow{DB}=(0;-1;2)$, $\overrightarrow{DC}=(1;0;0)$,

$$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&0\\2&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&2\\0&-1\end{vmatrix}\right)=(3;0;0),$$

$(\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}).\overrightarrow{DC}=1.3+0.0+0.0=3\neq 0 \Rightarrow$ bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng hay chúng là các đỉnh của một tứ diện. ■

2) Phương trình mặt cầu ($\mathcal{S}$) có dạng $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ (1)

Ta có $A\in(\mathcal{S}) \Leftrightarrow 5+A+2B+D=0$ (2)

$B\in(\mathcal{S}) \Leftrightarrow 11+A-B+3C+D=0$ (3)

$C\in(\mathcal{S}) \Leftrightarrow 5+2A+C+D=0$ (4)

$D\in(\mathcal{S}) \Leftrightarrow 2+A+C+D=0$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $A=-3$. (6)

Từ (2), (3) suy ra $3B-3C-6=0 \Leftrightarrow B=C+3$. (7)

Thay các kết quả (7) vào (2) ta có $5+A+2(C+3)+D=0$

$\Leftrightarrow 11+A+2C+D=0$ (8)

Từ (5), (8) suy ra $C+9=0\Leftrightarrow C=-9$. Thế vào (7) có $B=-6$

Thế $A=-3$, $C=-9$ vào (5) có $D=10$

Vậy phương trình mặt cầu ($\mathcal{S}$) là : $x^2+y^2+z^2-3x-6y-9z+10=0$

Đó là phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. ■

4.8$^{(P)}$. **1)** Gọi $I(0;b;0)$ là một điểm thay đổi trên trục Oy, ($b\in R$).

Phương trình mặt cầu ($\mathcal{S}$) tâm I có dạng : $x^2+y^2+z^2+2by+D=0$ (1)

$$\begin{cases}A\in(\mathcal{S})\\B\in(\mathcal{S})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1^2+(-1)^2-2b+D=0\\1^2+2^2+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=7\\D=-5\end{cases}$$

Thay vào (1) có phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2+y^2+z^2-7x-5=0.■$$

2) Gọi $I(a;0;c)$ là một điểm thay đổi trên mặt phẳng Oyz, ($a, c\in R$).

Phương trình mặt cầu ($\mathcal{S}$) tâm I có dạng :

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2cz+D=0 \qquad (1)$$

$$\text{Ta có : }\begin{cases}A\in(\mathcal{S})\\B\in(\mathcal{S})\\C\in(\mathcal{S})\end{cases}\Leftrightarrow\ (*)\begin{cases}5+4a+4c+D=0 & (2)\\5+4a+2c+D=0 & (3)\\11+2a+6c+D=0 & (4)\end{cases}$$

Từ (2), (3) suy ra $2c=0$. Do vậy từ $(*)\Rightarrow\begin{cases}5+4a+D=0\\11+2a+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=7\\D=-18\end{cases}$

Thay vào (1) ta có phương trình phải tìm là: $x^2+y^2+z^2+7x-18=0.$■

4.9$^{(P)}$. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì $G=(2;\,1;\,-1)$

Với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}=4\overrightarrow{MG}$. Do vậy

$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}|=12 \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{MG}|=12 \Leftrightarrow MG=3 \Leftrightarrow MG^2=9$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9 \qquad (1)$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là mặt cầu có phương trình (1). ■

BÀI TẬP 5

5.1 1) (α) là mp trung trực của AB, trong đó $A(-1;\,0;\,6)$, $B(1;\,-4;\,0)$

Cách 1 : • Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;\,-4;\,-6)$, trung điểm I của AB là $I=(0;\,-2;\,3)$.

• (α) là mặt phẳng trung trực của $AB \Leftrightarrow (\alpha)$ đi qua I và nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến $\Leftrightarrow$ (α) có phương trình $(x-0)-2(y+2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow x-2y-3z+5=0.$

Vậy $x-2y-3z+5=0$ là mp trung trực của AB.

Cách 2 : Điểm $M(x;\,y;\,z)$ thuộc mặt phẳng trung trực của $AB \Leftrightarrow MA=MB$

$\Rightarrow MA^2=MB^2 \quad \Rightarrow (x+1)^2+y^2+(z-6)^2=(x-1)^2+(y+4)^2+z^2$

$\Leftrightarrow 2x-12z+37=-2x+8y+17=0 \Leftrightarrow x-2y-3z+5=0.$

Đó là phương trình của mặt phẳng (α) cần tìm. ■

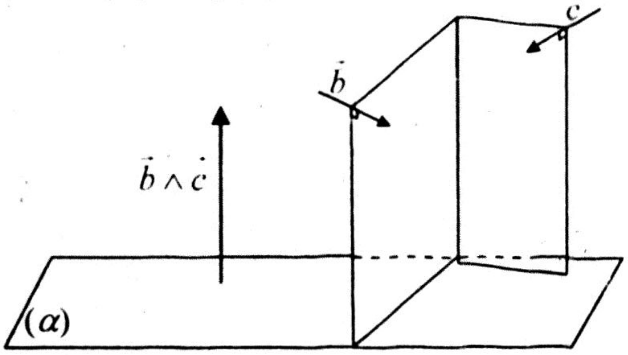
2) (α) vuông góc với trục $Ox \Leftrightarrow (\alpha)$ có cắt pháp tuyến là $\vec{i}=(1;\,0;\,0)$

Khi đi qua điểm $M_0(8;\,4;\,3)$, mp(α) có phương trình $x-8=0$.■

5.2. 1) Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(7;\,1;\,0)$ và có cùng vectơ pháp tuyến với mặt phẳng (β) : $4x-2y-z+3=0$ là :

$4(x-7)-2(y-1)-(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-2y-z-18=0 \qquad (1)$

Thấy rằng $-18\neq 3$ nên (1) là phương trình của mặt phẳng (α) cần tìm.■



Hình 149

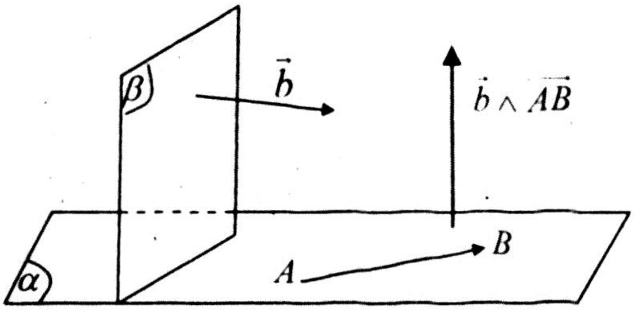
2) (h.149)Vectơ pháp tuyến của (β), (γ) theo thứ tự là

$\vec{b}=(1;\,1;\,-3)$, $\vec{c}=(1;\,-2;\,0)$

Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (β) và (γ) khi và chi khi (α) nhận $\vec{b}\wedge\vec{c}$ là vectơ pháp tuyến. Khi đi qua điểm A mặt phẳng (α) có phương trình là :

$$\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}(x-3)+\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}(z-5)=0$$

$\Leftrightarrow 7x-3y+3z+9=0$



Hình 150

3) (h.150).Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;\,2;\,-1)$

Vectơ pháp tuyến của mp(β) là $\vec{b}=(1;\,-2;\,3)$

Mặt phẳng (α) đi qua A, B và vuông góc với mp(β) chính là mặt phẳng đi qua A và nhận $\vec{b}\wedge\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy nên (α) có phương trình là

$$\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}(x-1)+\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}(y+2)+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z-1=0$$ ■

5.3 **1)** Ta có $\vec{AB} = (2; 0; 4)$, $\vec{AC} = (6; -6; 4)$, $\vec{AD} = (2; -2; -2)$,

$$\vec{AC} \wedge \vec{AD} = \left(\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (20; 20; 0)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \vec{AB}.(\vec{AC} \wedge \vec{AD}) \right| = \frac{1}{6} |2.20 + 0.20 + 4.0| = \frac{20}{3}. \blacksquare$$

2) • Mặt phẳng (α) cách đều hai điểm A, B thì $(\alpha) // AB$ hoặc (α) đi qua trung điểm AB. Từ đây suy ra mặt phẳng (α) cách đều bốn đỉnh A, B, C, D trong hai trường hợp sau đây :

+ Hoặc là (α) là mặt phẳng đi qua ba trung điểm ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện. Có bốn mặt phẳng như vậy.

+ Hoặc là (α) là mặt phẳng đi qua hai trung điểm của môt cặp cạnh đối diện. Có ba mặt phẳng như vậy.

Vậy có tất cả bảy mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

• *Chẳng hạn* :

Xét mặt phẳng (α) đi qua ba trung điểm ba cạnh cùng xuất phát từ đỉnh B của tứ diện. Đó là mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB song song với mp(ACD). Khi đó $\frac{1}{20}\vec{AC} \wedge \vec{AD} = (1; 1; 0)$ là vectơ pháp tuyến của (α).

Ta có $I = (5; 5; 1)$. Phương trình của (α) là $(x - 5) + (y - 5) + 0.(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 10 = 0. \blacksquare$

5.4.1) Ta có $\vec{AB} = (1; 1; -3)$, $\vec{AC} = (0; 3; 2)$. Mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng đi qua điểm A và nhận $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ làm vectơ pháp tuyến. Do vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}(z+3) = 0 \Leftrightarrow 11x - 2y + 3z - 2 = 0. \blacksquare$$

2) Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm bất khì trong không gian.

Ta có $\vec{AB} = (-2; 2; 2)$, $\vec{AC} = (5; 4; 5)$, $\vec{AM} = (x - 3; y + 1, z + 1)$.

Điểm $M \in (ABC)$ khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AM}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow (\vec{AB} \wedge \vec{AC}).\vec{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}(x-3) + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}(y+1) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 20y - 22z - 8 = 0 \Leftrightarrow x + 10y - 11z - 4 = 0. \blacksquare$$

3) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{22} + \frac{y}{7} + \frac{z}{87} = 1. \blacksquare$

5.5. Cắt các trục toạ độ tại ba điểm cách đều gốc toạ độ nên mặt phẳng cần tìm có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $|a| = |b| = |c| > 0$

Điểm $M_0(3; 4; 5)$ thuộc mặt phẳng ấy nên $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = 1$ (1)

* Với $b = c = a$ ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{a} + \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = 12$

* Với $b = c = -a$ ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{a} - \frac{4}{a} - \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = -2$

* Với $b = a$, $c = -a$ ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{a} - \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = 6$

* Với $b = -a$, $c = a$ ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{3}{a} - \dfrac{4}{a} + \dfrac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$

Vậy nên có tất cả 4 mặt phẳng cần tìm là :

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z - 12 = 0$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - y - z + 2 = 0$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - z - 6 = 0$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + z - 4 = 0.$$ ■

5.6. Giả sử $A = (a; 0; 0)$, $B = (0; b; 0)$, $C = (0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$

Thể tích tứ diện $OABC$ là $V = \dfrac{1}{6}OA.OB.OC = \dfrac{1}{6}abc$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

Điểm $M_0(\frac{4}{3}; \frac{11}{3}; \frac{64}{3})$ thuộc mp(α) $\Leftrightarrow \dfrac{4}{3a} + \dfrac{11}{3b} + \dfrac{64}{3c} = 1$.

Theo bất đẳng thức Cô- si : $1 = \dfrac{4}{3a} + \dfrac{11}{3b} + \dfrac{64}{3c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{4}{3a}.\dfrac{11}{3b}.\dfrac{64}{3c}} = \sqrt[3]{\dfrac{4.11.64}{abc}}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{4.11.64}{abc} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{abc}{6} \geq \frac{1308}{3} \quad \Rightarrow \quad V \geq \frac{1308}{3}$$

Dấu đẳng thức có khi $\dfrac{4}{3a} = \dfrac{11}{3b} = \dfrac{64}{3c} = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \{a = 4, b = 11, c = 64\}$

Vậy min$V = \dfrac{1308}{3}$ ứng với $a = 4$, $b = 11$, $c = 64$.

Khi đó mặt phẳng cần tìm có phương trình : $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{11} + \dfrac{z}{64} = 1$. ■

5.7. Gọi $(\Delta) = (\alpha) \cap (\beta)$. Xét hệ (*) $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x + 4y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Cho $x = 1$, từ (*) suy ra $y = z = 1$ ta có $A(1; 1; 1)$ là một điểm thuộc (Δ)

Cho $x = 3$, từ (*) suy ra $y = 2$, $z = 6$ ta có $B(3; 2; 6)$ là một điểm thuộc (Δ)

Mặt phẳng đi qua điểm M và (Δ) là mặt phẳng (ABM).

Ta có $\overrightarrow{MA} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (3; 1; 4)$. Cố nhiên (ABM) nhận $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ làm vectơ pháp tuyến nên (ABM) có phương trình là

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (y - 1) + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 7y + 2z + 3 = 0.$$ ■

5.8. Mặt phẳng (α) qua A, C và tạo một góc 60^0 với mặt phẳng (Oxz) nên (α) cắt trục Oy tại $B(0; b; 0)$ với $b \neq 0$.

Khi đó (α) có phương trình $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3bx - 3y + bz - 3b = 0$ (1)

Vectơ pháp tuyến của (α), (Oyz) theo thứ tự là $\vec{a} = (3b; -3; b)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Góc giữa (α), (Oxz) bằng 60^0 ⇔ $\cos 60^0 = \frac{3|b|}{\sqrt{10b^2+9}}$ ⇔ $\frac{1}{2} = \frac{3|b|}{\sqrt{10b^2+9}}$

⇔ $6|b| = \sqrt{10b^2+9}$ ⇔ $b^2 = \frac{9}{26}$ ⇔ $b = \pm\frac{3}{\sqrt{26}}$

Thay vào (2) và khử mẫu số, ta thu được hai mặt phẳng cần tìm là :

$(\alpha_1): 3x - \sqrt{26}y + z - 3 = 0$; $(\alpha_2): 3x + \sqrt{26}y + z - 3 = 0$.■

5.9$^{(P)}$. Mặt phẳng (α) chứa trục Ox nên có phương trình $By + Cz = 0$, với $(B^2 + C^2 \neq 0)$.

Vectơ pháp tuyến của (α), (β) lần lượt là $\vec{a} = (0; B; C)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$.

Góc giữa (α), (β) bằng 60^0 ⇔ $\cos 60^0 = \frac{|B-2C|}{\sqrt{B^2+C^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+2}}$

⇔ $\frac{1}{2} = \frac{|B-2C|}{3\sqrt{B^2+C^2}}$ ⇔ $9(B^2+C^2) = 4(B-2C)^2$ ⇔ $7C^2 - 16CB - 5B^2 = 0$ (1)

Cho $B = 7$ ta có (1) ⇔ $C^2 - 16C - 35 = 0$ ⇔ $C = 8 \pm 3\sqrt{11}$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là : $7x + (8 + 3\sqrt{11})y = 0$, $7x + (8 - 3\sqrt{11})y = 0$.■

5.10 • Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 0; -1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$

• (α) // (β) nên (α) có phương trình là : $5x - \sqrt{11}y - 8z + D = 0$ (1)

• (α) tiếp xúc (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến (α) bằng R .

Vậy nên $\frac{|D-3|}{\sqrt{25+11+64}} = \frac{|D-3|}{10} = \frac{1}{2}$ ⇒ $|D-3| = 5$ ⇒ $\left[\begin{array}{l} D = 8 \\ D = -2 \end{array}\right.$

Thay vào (1) có hai mặt phẳng cần tìm là:

$5x - \sqrt{11}y - 8z + 8 = 0$, $5x - \sqrt{11}y - 8z - 2 = 0$.■

5.11. Mặt cầu (S) có tâm $I = (-1; 1; 0)$, bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Xét mặt phẳng (α) qua A, C và cắt trục Oy tại $B(0; b; 0)$.

Gọi d là cách từ I đến mặt phẳng (α).

• Nếu $b = 0$ thì $(\alpha) \equiv (Oxz)$. Khi đó $d = |y_I| = 1 > R$ nên (Oxz) không phải là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu. (1)

• Với $b \neq 0$, thì (α) có phương trình $\frac{x}{-1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$ ⇔ $bx - y - bz + b = 0$ (2)

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) là $d = \frac{|b(-1) - b.1 - 0 + b|}{\sqrt{b^2 + 1^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2b^2+1}}$

• (α) tiếp xúc với (S) ⇔ $d = R$ ⇔ $d^2 = R^2$ ⇔ $\frac{1}{3} = \frac{b^2}{2b^2+1}$

⇔ $b^2 = 1$ ⇔ $b = \pm 1$. Thay vào (2) ta có: $x - y - z + 1 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$

Đó là các phương trình của mặt phẳng (α) cần tìm.■

5.12. Gọi d_β, d_γ lần lượt là khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mp(β), mp(γ).

1) Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) khi và chỉ khi

$d_\beta = d_\gamma$ ⇔ $\frac{|x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 4|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|3x_0 - y_0 + 2z_0 - 1|}{\sqrt{9+1+4}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 4 = 3x_0 - y_0 + 2z_0 - 1 \\ x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 4 = -(3x_0 - y_0 + 2z_0 - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0 + y_0 - z_0 - 5 = 0 \\ 4x_0 - 3y_0 + 5z_0 + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc các mặt phẳng có phương trình

$$(\alpha) : 2x + y - z - 5 = 0, \quad (\alpha') : 4x - 3y + 5z + 3 = 0.$$

Đó cũng chính là các mặt phẳng mà ta phải tìm.■

2) Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}_\beta = \mathrm{d}_\gamma \Leftrightarrow \frac{|6y_0 - 8z_0 + 1|}{\sqrt{0^2 + 6^2 + (-8)^2}} = \frac{|2x_0 - 9y_0 + 4z_0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-9)^2 + 4^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4y_0 - 8z_0 + 1|}{10} = \frac{|2x_0 - 9y_0 + 6z_0 - 3|}{11}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11(4y_0 - 8z_0 + 1) = 10(2x_0 - 9y_0 + 6z_0 - 3) \\ 11(4y_0 - 8z_0 + 1) = -10(2x_0 - 9y_0 + 6z_0 - 3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 20x_0 - 134y_0 + 60z_0 - 41 = 0 \\ 20x_0 + 46y_0 + 60z_0 + 14 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 20x_0 - 134y_0 + 60z_0 - 41 = 0 \\ 10x_0 + 23y_0 + 30z_0 + 7 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc các mặt phẳng có phương trình

$$(\alpha) : 20x - 134y + 60z - 41 = 0, \quad (\alpha') : 10x + 23y + 30z + 7 = 0.$$

Đó cũng chính là các mặt phẳng mà ta phải tìm.■

3) Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (β), (γ) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}_\beta = \mathrm{d}_\gamma \Leftrightarrow \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 3 = x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 1 \\ x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 3 = -(x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 = -1 \text{ (sai)} \\ x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc mặt phẳng (α) có phương trình : $x + 2y - 2z + 2 = 0$. Đó cũng là mặt phẳng duy nhất mà ta phải tìm.■

5.13. 1) Khoảng cách từ $M(1; 0; 1)$ đến mp$(\alpha) : x - \sqrt{6}y + 3z - 3 = 0$ là

$$\mathrm{d} = \frac{|1.1 - 0.\sqrt{6} + 1.3 + 8|}{\sqrt{4 + 9 + 3}} = \frac{12}{4} = 3.■$$

2) Khoảng cách từ $M(2; -3; 0)$ đến mp$(\alpha) : x - y + \sqrt{2}z + \mathrm{b} = 0$ là

$$\mathrm{d} = \frac{|2.1 - 3.(-1) + 0.\sqrt{2} - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{2}{2} = 1.■$$

5.14. 1) *Cách* 1 : Dễ thấy điểm $A(-3; 0; 1)$ thuộc mp(α). Bởi $(\alpha) // (\beta)$ nên

$$\mathrm{d}((\alpha), (\beta)) = \mathrm{d}(A, (\beta)) = \frac{|-6|}{\sqrt{4 + 7 + 25}} = \frac{6}{6} = 1.■$$

Cách 2: Lấy một điểm bất kì $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (α). Ta có

- $2x_0 + \sqrt{7}y_0 - 5z_0 + 3 = 0$
- Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) là

$$\mathrm{d} = \frac{|2x_0 + \sqrt{7}y_0 - 5z_0 - 5|}{\sqrt{4 + 7 + 25}} = \mathrm{d} = \frac{|\overbrace{(2x_0 + \sqrt{7}y_0 - 5z_0 + 1)}^{=0} - 6|}{6} = 1$$

- Do $(\alpha) // (\beta)$ nên d = 1 cũng là khoảng cách hai mặt phẳng ấy.■

2) Dễ thấy điểm $O(0; 0; 0)$ thuộc mp(α). Bởi $(\alpha) // (\beta)$ nên

$$d((\alpha), (\beta)) = d(O, (\beta)) = \frac{|-21|}{\sqrt{9+25+15}} = \frac{21}{7} = 3$$

5.15$^{(P)}$. 1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $y + \sqrt{3}z + 5 = 0$ là $\vec{n} = (0;1;\sqrt{3})$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $z - 3 = 0$ là $\vec{n'} = (0; 0; 1)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó :

$$\cos\varphi = \frac{|0.0 + 1.0 + \sqrt{3}.1|}{\sqrt{0+1+3}.\sqrt{0+0+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho là $\frac{\pi}{6}$ ■

2) Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α) : $2x - y - 2z + 1 = 0$ là $\vec{n} = (2; -1; -2)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 5 = 0$ là $\vec{n'} = (\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 0)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó :

$$\cos\varphi = \frac{|2\sqrt{3} - (-\sqrt{3}) + 0.5|}{\sqrt{3+3+0}.\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho là $\frac{\pi}{4}$. ■

3) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ $\vec{n} = (\sqrt{3};1;2\sqrt{2})$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ là $\vec{n'} = (1; \sqrt{3}; 0)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó :

$$\cos\varphi = \frac{|\sqrt{3}.1 + 1.\sqrt{3} + 2\sqrt{2}.0|}{\sqrt{3+1+8}.\sqrt{1+3+0}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho là $\frac{\pi}{3}$. ■

5.16$^{(P)}$. 1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 5 = 0$ là $\vec{n} = (\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $x + 9 = 0$ là $\vec{n'} = (1; 0; 0)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó :

$$\cos\varphi = \frac{|1.\sqrt{2} + \sqrt{2}.0 + 0.0|}{\sqrt{2+2+0}.\sqrt{1+0+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho là $\frac{\pi}{4}$. ■

2) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ $\vec{n} = (\sqrt{3};1;\sqrt{2})$). Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $\sqrt{2}x + \sqrt{6}y + 2 = 0$ là $\vec{n'} = (\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó :

$$\cos\varphi = \frac{|\sqrt{3}.\sqrt{2} + 1.\sqrt{6} + \sqrt{2}.0|}{\sqrt{3+1+8}.\sqrt{2+6+0}} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho là $\frac{\pi}{3}$. ■

5.17$^{(P)}$. **1)** Xét hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 3z = 0$, $(\beta): x + 2y + 3z = 0$.

Ta có $1 : 2 : -3 \neq 1 : 2 : 3 \Rightarrow (\alpha)$ cắt (β) ■

2) Xét hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + y - 3 = 0$, $(\beta): x + 3y + 3z = 0$

Ta có $3 : 1 : 0 \neq 1 : 3 : 3 \Rightarrow (\alpha)$ cắt (β) ■

3) Xét hai mặt phẳng $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y + \frac{4}{5}z + 1 = 0$, $(\beta): \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y + \frac{5}{4}z + 1 = 0$

Ta có $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : 1 = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : 1 \Rightarrow (\alpha) \equiv (\beta)$ ■

5.18$^{(P}$. **1)** Xét hai mặt phẳng $(\alpha): 7x + 3y - 10z = 0$, $(\beta): x + 3y + 5z - 9 = 0$.

Ta có $7 : 3 : -10 \neq 1 : 3 : 5 \Rightarrow (\alpha)$ cắt (β)

2) Xét hai mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, $(\beta): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

Ta có $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1} \Rightarrow (\alpha)$ cắt (β) ■

3) Xét hai mặt phẳng $(\alpha): x\log_2 3 - y\log_5 3 + z\log_{11} 3 + 3 = 0$,

$$(\beta):\ x\log_2 7 - y\log_5 7 + z\log_{11} 7 + 7 = 0.$$

Trước hết với mọi $M > 0$, $0 < N \neq 1$, $0 < a \neq 1$ ta có $\log_N M = \dfrac{\log_a M}{\log_a N}$

Theo đó $\log_7 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 7} = \dfrac{-\log_5 3}{-\log_5 7} = \dfrac{\log_{11} 3}{\log_{11} 7} \neq \dfrac{3}{7} \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta)$ ■

5.19$^{(P)}$. **1)** Vectơ pháp tuyến của mp$(\alpha): x\cos A + y\cos B + z\sin C + 3 = 0$ là :

$\vec{n} = (\cos A; \cos B; \cos C)$.

Vectơ pháp tuyến của mp$(\beta): x + y\cos C - z\sin B + 7 = 0$ là : $\vec{n'} = (1;\ \sin C;\ -\sin B)$.

Ta có $\vec{n}.\vec{n'} = \cos A + \cos B\sin C - \sin B\cos C = \cos A + \cos(B + C)$

$= \cos A + \cos(\pi - A) = \cos A - \cos A = 0$

Vậy nên $(\alpha) \perp (\beta)$. ■

2) Xét hai mặt phẳng $(\alpha): x\sin\frac{A}{2} + y\sin\frac{B}{2} + z\sin\frac{C}{2} + 1 = 0$,

$$(\beta): \frac{ax}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{bx}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{cx}{\cos\frac{C}{2}} - 4 = 0.$$

Để ý $\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}} : \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = 2\dfrac{a}{\sin A} = 2.2R = 4R$

Tương tự suy ra $\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}} : \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{b}{\cos\frac{B}{2}} : \sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{c}{\cos\frac{C}{2}} : \sin\dfrac{C}{2} = 4R \neq -\dfrac{4}{1}$

Vậy nên $(\alpha) \,//\, (\beta)$. ■

5.20$^{(P)}$. • Hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{m+3}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{4m+5}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{2} = \dfrac{-1}{m} \\ \dfrac{4m+5}{3} = \dfrac{-1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 \\ 4m^2 + 5m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Với $m = -1$ thì $\frac{-1}{-m} \neq \frac{-10}{m} \Leftrightarrow -1 \neq 10$ là đẳng thức đúng. Từ đó suy ra

+ $m = -1 \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$. + $m \neq -1 \Rightarrow (\alpha)$ cắt (β).

+ Không có giá trị của m để $(\alpha) \equiv (\beta)$.

• $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow 2(m + 3) + m.1 + 3(4m + 5) = 0 \Leftrightarrow 15m + 21 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{5}$

5.21$^{(P)}$. 1) Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) theo thứ tự là :

$\vec{n} = (\cos A; \cos B; \cos C)$, $\vec{n'} = (\tan A; -\sin C; -\sin B)$.

Ta có $\vec{n}.\vec{n'} = \tan A\cos A - \sin B\cos C - \cos B\sin C = \sin A - \sin(B + C) = \sin A - \sin A = 0$

Vậy nên $(\alpha) \perp (\beta)$. ■

2) Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) theo thứ tự là :

$\vec{n} = (\tan A; -\cot A; \cot 2A)$, $\vec{n'} = (1; -1; 2)$.

Để ý $\vec{n}.\vec{n'} = \tan A - \cot A + 2\cot 2A = -2\cot 2A + 2\cot 2A = 0, \forall A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Vậy nên $(\alpha) \perp (\beta)$ ■

5.22$^{(P)}$. 1) • Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (3; 2; -2)$

Lấy $M_1(x_1; y_1; y_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $3x_1 + 2y_1 - 2z_1 + 5 = 0$. (1)

Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - 1; y_1 - 2; z_1 + 3)$

• M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0M_1 \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{3} = \frac{y_1 - 2}{2} = \frac{z_1 + 3}{2} =$$

$$= \frac{3(x_1 - 1) + 2(y_1 - 2) - 2(z_1 + 3)}{3.3 + 2.2 - 2.(-2)} = \frac{\overbrace{(3x_1 + 2y_1 - 2z_1 + 5)}^{=0} - 14}{14} = -1 \text{ (Do có (1))}$$

$\Rightarrow \{x_1 = -3; y_1 = 1; z_1 = -4\}$. Vậy $M_1 = (-3; 1; -4)$ là điểm phải tìm.■

2) • Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (1; 2; 3)$

Lấy $M_1(x_1; y_1; y_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $x_1 + 2y_1 + 3z_1 - 9 = 0$. (1)

Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 + 2; y_1; z_1 + 1)$

• M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mp(α) thì $M_0M_1 \perp (\alpha)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_1 + 2}{1} = \frac{y_1}{2} = \frac{z_1 + 1}{3} =$$

$$= \frac{(x_1 + 2) + 2y_1 + 3(z_1 + 1)}{1 + 2.2 + 3.3} = \frac{\overbrace{(x_1 + 2y_1 + 3z_1 - 9)}^{=0} + 14}{14} = 1. \text{ (Do có (1))}$$

$\Rightarrow \{x_1 = -1; y_1 = 2; z_1 = 2\}$. Vậy $M_1 = (-1; 2; 2)$ là điểm phải tìm.■

5. 23$^{(P)}$ 1) • Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là : $4x_1 - 3y_1 + z_1 + 4 = 0$. (1)

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$, $\overrightarrow{AI} = (x_1 - 5; y_1 + 1; z_1 - 3)$

• I là điểm giao của đường thẳng AB với mp(α) thì $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 - 5}{2} = \frac{y_1 + 1}{-1} = \frac{z_1 - 3}{1} = \frac{4(x_1 - 5) - 3(y_1 - 1) + (z_1 - 3)}{8 + 3 + 1}$$

$$= \frac{\overbrace{(4x_1 - 3y_1 + z_1 + 4)}^{=0} - 24}{12} = -2 \text{ (Do có (1))} \Rightarrow \{x_1 = 1; y_1 = -3; z_1 = 1\}$$

Vậy $I = (1; -3: 1)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α). ■

2) • Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $2x_1 + 5y_1 + 7z_1 - 1 = 0$. (1)

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{AI} = (x_1 + 3; y_1 - 2; z_1)$

• I là điểm giao của đường thẳng AB với mp(α) thì $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + 3}{3} = \frac{y_1 - 2}{-2} = \frac{z_1}{1} = \frac{2(x_1 + 3) + 5(y_1 - 2) + 7z_1}{6 - 10 + 7} =$$

$$= \frac{\overbrace{(2x_1 + 5y_1 + 7z_1 - 1)}^{=0} - 3}{3} = -1 \text{ (Do có (1))} \Rightarrow \{x_1 = -6; y_1 = 0; z_1 = -1\}$$

Vậy $I = (-6; 0; -1)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α). ■

5. 24$^{(P)}$. • Điểm $I(x_1; y_1; z_1)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng AB

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0I} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

+ Ta có $\overrightarrow{M_0I} = (x_1; y_1 - 2; z_1 - 1)$, $\overrightarrow{AI} = (x_1 + 1; y_1 - 1; z_1)$, $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -1)$.

+ $\overrightarrow{M_0I} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0I}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + (y_1 - 2) - (z_1 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1 + y_1 - z_1 - 1 = 0$

+ $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow \dfrac{x_1 + 1}{2} = \dfrac{y_1 - 1}{-1} = \dfrac{z_1}{1} = \dfrac{2(x_1 + 1) + (y_1 - 1) - z_1}{2.2 - 1 + 1} =$

$$= \frac{\overbrace{(2x_1 + y_1 - z_1 - 1)}^{=0} + 2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Do có (1))} \Rightarrow \{x_1 = 0; y_1 = \frac{1}{2}; z_1 = \frac{1}{2}\}$$

Vậy $I = (0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ hình chiếu của điểm M_0 trên đường thẳng AB. ■

2) $M(x; y; z)$ là điểm đối xứng với điểm M_0 qua đường thẳng $AB \Leftrightarrow I$ là trung điểm

$$MM_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + x_0 = 2x_1 \\ y + y_0 = 2y_1 \\ z + z_0 = zx_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0 = 0 \\ y + 2 = 1 \\ z + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy $M(0; -1; 0)$ là điểm đối xứng với điểm M_0 qua đường thẳng AB .

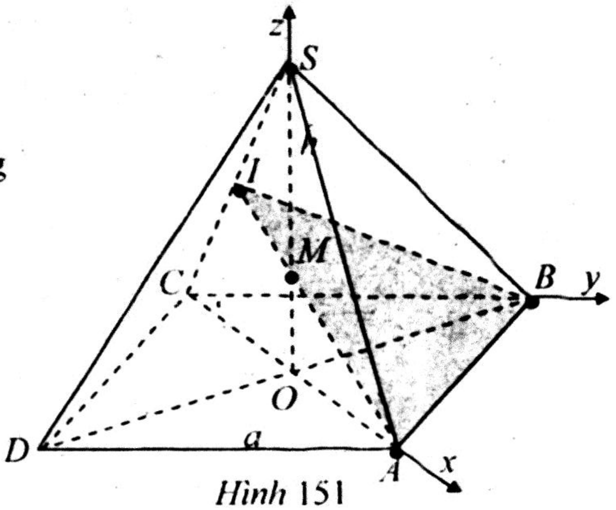
5.25 (h.151). Chon hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ là tâm O của đáy, tia Ox chứa tia OA, tia Oy chứa tia OB, tia Oz chứa tia OS. Khi đó

$$A = (\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0),\ B = (0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0).\ C = (-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0),\ S = (0; 0; h)$$

Gọi $M = SO \cap AI$. Rõ ràng M là trọng tâm ΔSAC nên $M = (0; 0; \frac{h}{3})$

Mặt phẳng (ABI) cũng chính là mặt phẳng (ABM) và có phương trình là $\dfrac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \dfrac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \dfrac{z}{\frac{h}{3}} = 1$

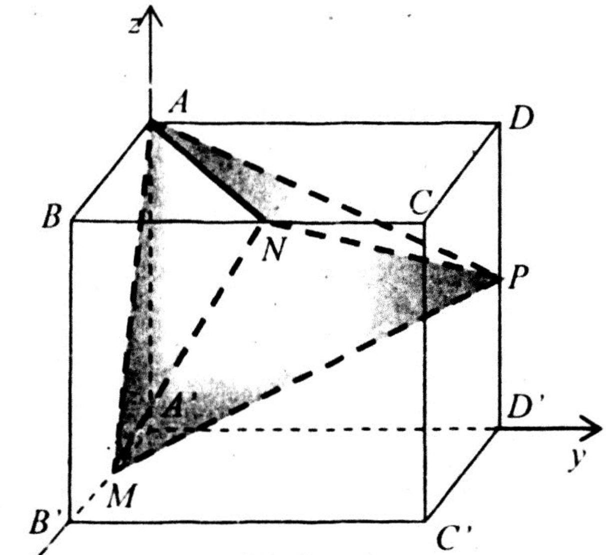
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x}{a} + \frac{\sqrt{2}y}{a} + \frac{3z}{h} - 1 = 0$$



Hình 151

- Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABI) là $d = \dfrac{\left|\dfrac{3h}{h}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{9}{h^2}}} \Rightarrow d = \dfrac{2}{\sqrt{4h^2+9a^2}}$. ■

5.26 (h.152)Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho gốc O là đỉnh A' của hình lập phương, tia Ox chứa tia $A'B'$, tia Oy chứa tia $A'D'$, tia Oz chứa tia $A'A$.



Hình 152

Khi đó $A' = (0; 0; 0)$, $B' = (1; 0; 0)$,
$D' = (0; 1; 0)$, $A' = (0; 0; 1)$,
$C = (1; 1; 1)$, $B = (1; 0; 1)$,
$D = (0; 1; 1)$, $C' = (1; 1; 0)$.

Từ đó :

1) $\overrightarrow{AC'} = (1; 1; -1)$, $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B} = 0 \Rightarrow AC' \perp A'B$. ■

2) Ta có $M = (\frac{1}{2}; 0; 0)$,

$N = (1; \frac{1}{2}; 1)$, $P = (0; 1; \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MN \perp AC'$ (1)

$\overrightarrow{MP} = (-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow MP \perp AC'$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $AC' \perp$ mp(MNP) ■

3) Ta có $\overrightarrow{MA} = (-\frac{1}{2}; 0; 1)$,

$$\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}) = -\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.(-\frac{3}{4}) + 1.\frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

$\Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP})| = \frac{1}{6}.\frac{9}{8} = \frac{3}{16}$ ■

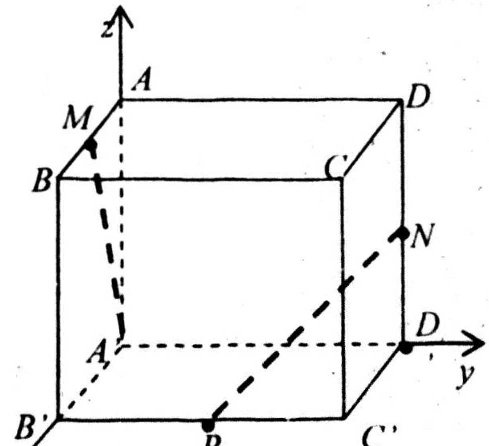
5.27 (h.153)Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho gốc O là đỉnh A' của hình lập phương, tia Ox chứa tia $A'B'$, tia Oy chứa tia $A'D'$, tia Oz chứa tia $A'A$.

Khi đó $A' = (0; 0; 0)$, $B' = (1; 0; 0)$,
$D' = (0; 1; 0)$, $A' = (0; 0; 1)$,
$C = (1; 1; 1)$, $B = (1; 0; 1)$,
$D = (0; 1; 1)$, $C' = (1; 1; 0)$,

Từ đó : $M = (\frac{1}{2}; 0; 1)$, $N = (0; 1; \frac{1}{2})$,

$P = (1; \frac{1}{2}; 0)$, $\overrightarrow{A'M} = (\frac{1}{2}; 0; 1)$,

$\overrightarrow{NP} = (1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$



Hình 153

1) Ta có $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{NP} = 0 \Rightarrow A'M \perp NP$ ■

2) *Cách* 1 : Gọi (α) là mặt phẳng chứa NP và song song với $A'M$.

Đó là mặt phẳng đi qua P và nhận $\overrightarrow{A'M} \wedge \overrightarrow{NP}$ làm vectơ pháp tuyến.

Bởi thế (α) có phương trình là : $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}(y - \frac{1}{2}) + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.z = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 10y - 2z - 9 = 0$

Bởi $A'M. \mathbin{/\!/} (\alpha)$ nên $d(A'M, NP) = d(A'M, (\alpha)) = d(A', (\alpha))$

$$= \frac{9}{\sqrt{4^2 + 10^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{2\sqrt{30}}.$$ ■

Cách 2 : Gọi d là khoảng cách giữa $A'M$ và NP. Ta có

$$V_{A'MNP} = \frac{1}{6} A'M.NP.d.\sin 90^0 = \frac{1}{6}|\overrightarrow{A'M}(\overrightarrow{A'N} \wedge \overrightarrow{A'P})| \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{A'M}(\overrightarrow{A'N} \wedge \overrightarrow{A'P})|}{A'M.NP}$$

Phần tiếp theo dành cho bạn đọc.

5. 28. (h.154) Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\vec{n} = (A; B; C)$

1) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ không vuông góc với $\vec{n}$

$\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} \neq 0 \Leftrightarrow A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) \neq 0$

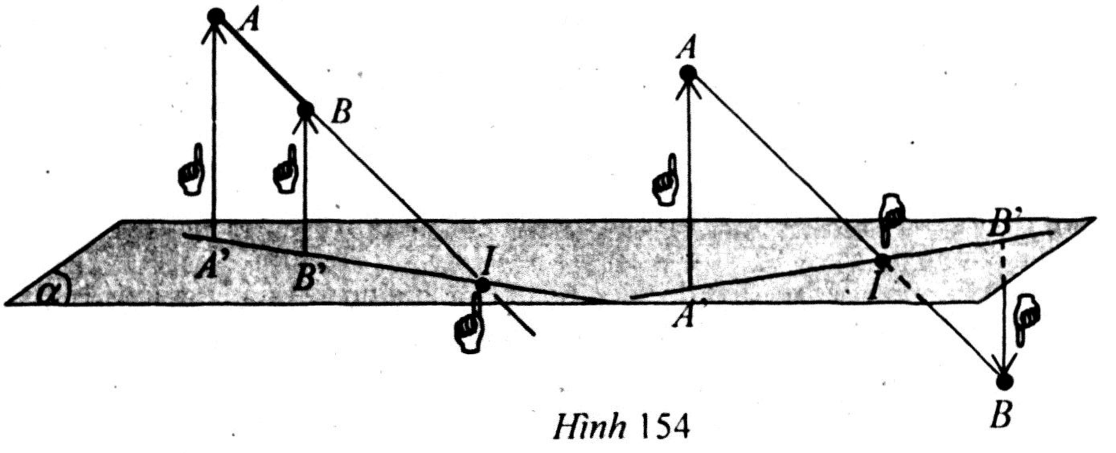
$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 \neq Ax_2 + By_2 + Cz_2$. ■

2) Gọi $A'(x'_1; y'_1; z'_1)$, $B'(x'_1; y'_1; z'_1)$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α). Ta có :

$$Ax'_1 + By'_1 + Cz'_1 + D = Ax'_2 + By'_2 + Cz'_2 + D = 0,$$

$$\overrightarrow{A'A} = (x_1 - x'_1; y_1 - y'_1; z_1 - z'_1),\ \overrightarrow{B'B} = (x_2 - x'_2; y_2 - y'_2; z_2 - z'_2).$$

Đoạn thẳng AB cắt mặt phẳng (α) khi và chỉ khi A và B nằm về hai phía



Hình 154

khác nhau đối với mặt phẳng $(\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'A}$ và $\overrightarrow{B'B}$ là hai vectơ có hướng trái ngược với nhau. Nghĩa là trong hai vectơ $\overrightarrow{A'A}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có một vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{n}$, và vectơ kia thì trái hướng với vectơ $\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{B'B} < 0$.

Ta có $\vec{n}.\overrightarrow{A'A} = A(x'_1 - x_1) + B(y'_1 - y_1) + C(z'_1 - z_1)$

$$= \underbrace{(Ax'_1 + By'_1 + Cz'_1 + D)}_{=0} + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \qquad (1)$$

Tương tự $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{B'B} = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n}^2.\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{B'B} = (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{B'B} < 0 \Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$

Tóm lại : Đoạn thẳng AB cắt mặt phẳng (α) khi và chỉ khi

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0. \blacksquare$$

3) Gọi d_A, d_B lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B đến mp(α).

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) tại I sao có B nằm giữa I và A khi và chỉ khi A và B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (α) và $\dfrac{d_A}{d_B} > 1$

- Từ câu 2 suy ra : A và B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (α)

$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0$ (1)

- $\dfrac{d_A}{d_B} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|} > 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} > 1$

4) Từ kết quả câu 2 và 3 suy ra :

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) tại I sao có A nằm giữa I và B

$\Leftrightarrow \dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} < 1. \blacksquare$

5. 29. Gọi $M'(x_0'; y'; z')$ là một điểm thuộc (α), tức là : $Ax' + By' + Cz' + D = 0$. (1)

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (x' - x_0; y' - y_0; z' - z_0)$

Cách 1. • M' là điểm rơi của điểm M trên (α) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}$ cùng phương với $\vec{r}$ (2)

$$\Leftrightarrow \frac{x' - x_0}{a} = \frac{y' - y_0}{b} = \frac{z' - x_0}{c} = \frac{A(x' - x_0) + B(y' - y_0) + C(z' - z_0)}{aA + bB + cC} =$$

$$= \frac{\overbrace{(Ax' + By' + Cz')}^{=0} - Ax_0 - By_0 - Cz_0}{aA + bB + cC} = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{aA + bB + cC}$$

$$\Rightarrow (x' = x_0 + ka;\ y' = y_0 + kb;\ z' = z_0 + kc) \text{ với } k = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{aA + bB + cC}. \blacksquare$$

Cách 2. (tiếp nối từ (2)) : (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_0 + at \\ y' = y_0 + bt \\ z' = z_0 + ct \end{cases}$. (3)

Thế vào (1) ta tìm được k, thế k tìm được vào (3) ta có toạ độ của điểm M' cần tìm. ■

Bài tập trắc nghiệm

55.1$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Lời giải tự luận .

- Mặt phẳng (α) cách đều hai điểm A, B thì (α) // AB hoặc (α) đi qua trung điểm AB.
- Từ đây suy ra mặt phẳng (α) đi qua đỉnh A *và* cách đều ba đỉnh B, C, D trong hai trường hợp sau đây :

+ Hoặc là (α) // (BCD). Có bốn mặt phẳng như vậy.

+ Hoặc là (α) là mặt phẳng đi qua A và chứa một đường trung bình của ΔBCD. Có ba mặt phẳng như vậy.

Vậy qua đỉnh A có tất cả *bốn* mặt phẳng cách đều ba đỉnh còn lại của tứ diện ấy.

Tương tự với các đỉnh B, C, D suy ra có tất cả $4.4 = 16$ mặt phẳng cách đều ba đỉnh còn lại của tứ diện ấy.

Lời nhắn. Các bạn liên hệ với bài tập 5.3

55.2$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

Phương trình mặt phẳng chứa trục Oy có dạng $Ax + Cz = 0$.

Theo đó $2x + 3z = 0$ là câu trả lời của bài toán. ■

55.3$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận* .

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) : 3y + 4z + 5 = 0$ là $\vec{n} = (0; 3; 4)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Ta có $\vec{i}.\vec{n} = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (Oyz)$ ■

55.4$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) : 2x + y + z = 0$ là $\vec{n} = (2; 1; 1)$

Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 1.2 + 1.1 - 3.1 = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (Oyz)$ ■

55.5$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **A.** *Lời giải tự luận*

Phương trình mặt phẳng (ABC) là : $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{\frac{2}{3}} + \dfrac{z}{\frac{3}{4}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1}x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{4}{3}z = 1$. ■

55.6$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận*

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(2; 1; 0)$ và song song với mặt phẳng (α) :

$2x + 3y - 5z + 13 = 0$ là : $2(x - 2) + 3(y - 1) - 5z = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 5z - 7 = 0$. ■

55.7$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận*

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 2)$. Trung điểm I của AB là $I = (1; 0; 2)$.
- (α) là mặt phẳng trung trực của $AB \Leftrightarrow (\alpha)$ đi qua I và nhận

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến $\Leftrightarrow$ (α) có phương trình

$(x - 1) + y + (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0$.

Vậy $x + y + z - 3 = 0$ là phương trình mặt phẳng trung trực của AB. ■

55.8$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận*

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 3; 3)$. Mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ làm một vectơ pháp tuyến. Do vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} (z - 1) = 0 \Leftrightarrow y - z + 1 = 0. \ ■$$

55.9$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm*: **C.** *Lời giải tự luận*

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y - 7 = 0$ là $\vec{n} = (2; -1; 0)$

Vectơ mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (α) là :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1; 2; -5). \ ■$$

55.10$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

- Lấy $I(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $2x_1 + 5y_1 + 7z_1 - 26 = 0$. (1)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AI} = (x_1 - 1; y_1; z_1 + 1)$

- Điểm I là giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) thì $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1-1}{1}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1+1}{1}=\frac{5(x_1-1)+2y_1+7(z_1+1)}{5.1+2.1+7.1}$$

$$=\frac{\overbrace{(5x_1+2y_1+7z_1-26)}^{=0}+28}{14}=2 \text{ (Do có (1))} \Rightarrow \{x_1=3;\ y_1=2;\ z_1=1)$$

Vậy $I=(3;\ 2;\ 1)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α).■

55.11$^{(P)}$. • Lấy $I(x_1;y_1;z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là: $x_1+5y_1-4z_1-13=0$. (*)

Ta có $\vec{AB}=(2;-1;0)$. $\vec{AI}=(x_1-2;y_1-1;z_1)$.

• Điểm I là giao điểm của đường thẳng AB với mp(α) thì $\vec{AI}$ cùng phương với

$$AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1+2t \\ y_1=2-t\ ,t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$$ .Thế vào (*) có $(1+2t)+5(2-t)-4.1-13=0$

$\Leftrightarrow 3t+6=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow \{x_1=-3;y_1=4;z_1=1)$.

Vậy $I=(-3;\ 4;\ 1)$ là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α).

55.12$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **A.** *Lời giải tự luận*

• Lấy $A_1(x_1;y_1;z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $x_1+3y_1-2z_1+31=0$. (1)

Vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\vec{n}=(1;3;-2)$, $\vec{AA_1}=(x_1+1;y_1-2;z_1-1)$

• A_1 là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mp(α) thì $AA_1\perp(\alpha)$

$$\Rightarrow \vec{AA_1} \text{ cùng phương với } \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1}=\frac{y_1-2}{3}=\frac{z_1-1}{-2}=$$

$$=\frac{(x+1)+3(y_1-2)-2(z_1-1)}{1+3.3-2(-2)}=\frac{\overbrace{(x+3y_1-2z_1+31)}^{=0}-28}{14}=-2 \text{ (Do có (1))}$$

$\Rightarrow\{x_1=-3;y_1=0;\ z_1=5\}$. Vậy $A_1=(-3;0;5)$ là điểm phải tìm.■

55.13$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận*

1) Vectơ pháp tuyến của mp(α) : $x-2y-2z+1=0$ là $\vec{n}=(1;-2;-2)$

Vectơ pháp tuyến của mp(β) : $3x-y+z=0$ là $\vec{n'}=(3;-1;1)$.

Ta có $$\cos\varphi=\frac{|1.3+-2.(-2)-2.1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{5}{3\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{11}}{33}$$ ■

55.14$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

Vectơ pháp tuyến của mp(α) : $2x+2y+z+1=0$ là $\vec{n}=(2;2;1)$

Vectơ pháp tuyến của mp(β) : $y+z+13=0$ là $\vec{n'}=(0;1;1)$.

Gọi φ là góc giữa (α), (β) ta có :

$$\cos\varphi=\frac{|2.0+2.1+1.1|}{\sqrt{2^2+2^2+1}\sqrt{0+1^2+1^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi=45^0$$ ■

55.15$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận*

Vectơ pháp tuyến của mp(α) : $x-2y+z+3=0$ là $\vec{n}=(1;-2;1)$

Vectơ pháp tuyến của mp(β) : $x+y-2z+13=0$ là $\vec{n'}=(1;1;-2)$.

Gọi φ là góc giữa (α), (β) ta có: $\cos\varphi=\frac{|1.1-2.1+1.(-2)|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi=30^0$ ■

55.16$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận*

Vectơ pháp tuyến của mp(α) : $x + \sqrt{3}z + 7 = 0$ là $\vec{n} = (1; 0; \sqrt{3})$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là : $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa (α) và (Oxy), ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|1.0 + 0.0 + \sqrt{3}.1|}{2.1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0 \blacksquare$$

55.17$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận*

Vectơ pháp tuyến của mp(α) : $x + my - (m+1)z = 0$ là $\vec{n} = (1 ; m; -m-1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) : $x - 2y + z = 0$ là $\vec{n'} = (1; -2; 1)$.

Gọi φ là góc giữa (α), (β) ta có : $\cos\varphi = \dfrac{|1.1 - 2.m - m - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + m^2 + (m+1)^2}}$

$$= \frac{|3m|}{\sqrt{6}.\sqrt{2(m^2 + m + 1)}} = \frac{|\sqrt{3}m|}{2\sqrt{m^2 + m + 1}}$$

Theo giả thiết $\varphi = 60^0 \Rightarrow \dfrac{|\sqrt{3}.m|}{2\sqrt{m^2 + m + 1}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3m^2 = m^2 + m + 1$

$\Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \{m = 1, m = -\dfrac{1}{2}\}$ ■

55.18. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

- Hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{5m+1}{3} = \frac{2}{m} = \frac{m+3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5m+1}{3} = \dfrac{2}{m} \\ \dfrac{m+3}{2} = \dfrac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 + m - 6 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Với $m = -1$ thì $\dfrac{2}{m} \neq \dfrac{10}{6+m} \Leftrightarrow -2 \neq 2$ là đẳng thức đúng. Nghĩa là khi $m = -1$ thì (α) // (β). ■

55.19. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

Ta có $1 : 2 : -3 : \sin a\cos a = 2 : 4 : -6 : \sin 2a$, với $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha) \equiv (\beta)$. ■

55.20$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận*

Để ý với mọi $m \in \mathbb{R}$ ta có $\dfrac{2m}{m^2+2} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{-(m-1)^2 - 1}{m^2+2} \neq 0$ hay $\dfrac{2m}{m^2+2} \neq \dfrac{1}{1}$

$\Rightarrow$ (α) cắt (β). ■

55.21$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận*

Khoảng cách từ điểm $M(1; 4; 0)$ đến mp(α) : $5x - 8y + \sqrt{11}z + 7 = 0$ là

$$d = \frac{|5.1 - 8.4 + \sqrt{11}.0 + 7|}{\sqrt{25 + 64 + 11}} = \frac{20}{10} = 2 \blacksquare$$

55.22$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

Dễ thấy điểm $A(0; 5; -1)$ thuộc mp(α). Bởi (α) // (β) nên

$$d((\alpha), (\beta)) = d(A, (\beta)) = \frac{|3.0 + 2.5 - 10(-1) + 13|}{\sqrt{17 + 4 + 100}} = \frac{33}{11} = 3 \blacksquare$$

55.23$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **C.** *Lời giải tự luận*

Gọi d_α, d_β lần lượt là khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mp(α), mp(β).

Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (α), (β) khi và chỉ khi

$$d_\beta = d_\gamma \Leftrightarrow \frac{|x_0 + 2y_0 - 3z_0 - 1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|x_0 + 2y_0 - 3z + 5|}{\sqrt{1+4+9}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 2y_0 - 3z_0 - 1 = x_0 + 2y_0 - 3z + 5 \\ x_0 + 2y_0 - 3z_0 - 1 = -(x_0 + 2y_0 - 3z + 5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 = 5 \text{ (sai)} \\ x_0 + 2y_0 - 3z_0 + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc mặt phẳng có phương trình : $x + 2y - 3z + 3 = 0$

Đó cũng là mặt phẳng duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.■

55.24$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **A.** *Lời giải tự luận*

Gọi d_α, d_β lần lượt là khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mp(α), mp(β).

Điểm M thuộc mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (α), (β) khi và chỉ khi

$$d_\beta = d_\gamma \Leftrightarrow \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|3x_0 + 4y_0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 3}{3} = \pm\frac{3x_0 + 4y_0 + 5}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 3) = 3(3x_0 + 4y_0 + 5) \\ 5(x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 3) = -3(3x_0 + 4y_0 + 5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0 + y_0 + 5z_0 + 15 = 0 \\ 7x_0 + 11y_0 - 5z_0 = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra điểm M thuộc các mặt phẳng có phương trình

$(_\gamma) : 2x + y + 5z + 15 = 0$, $(_\gamma') : 7x + 11y - 5z = 0$.

Đó cũng chính là các mặt phẳng mà ta phải tìm.■

55.25$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận . Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm là $I = (0; 1; 0)$ và bán kính là $R = 1$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $2x + 2y - z + 1 = 0$ là

$$d = \frac{|2.0 + 2.1 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{3}{3} = 1 = R$$

Vậy $2x + 2y - z + 1 = 0$ là phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S)

Bảng kết quả câu hỏi trắc nghiệm
BÀI TẬP 5

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
55.1	D	55.6	B	55.11	B	55.16	D	55.21	D
55.2	C	55.7	D	55.12	A	55.17	B	55.22	C
55.3	C	55.8	B	55.13	B	55.18	C	55.23	C
55.4	C	55.9	C	55.14	C	55.19	C	55.24	A
55.5	A	55.10	C	55.15	D	55.20	B	55.25	B

BÀI TẬP 6

6.1. 1) Đặt $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 + 2t \text{, với } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng (Δ). ■

2) Đặt $\dfrac{x-4}{20}=\dfrac{y-11}{10}=\dfrac{z-64}{51}=t \Rightarrow \begin{cases} x=4+20t \\ y=11+10t \\ z=64+51t \end{cases}$, với $t\in\mathbb{R}$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng (Δ). ■

6.2.1) Ta có $\begin{cases} x=1-3t \Rightarrow 1-x=3t \\ y=3+2t \Rightarrow y-3=2t \\ z=t \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1-x}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$ (do cùng bằng t)

Đó là phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ). ■

2) Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}=(1;\,0;\,-13)$. Toạ độ của $\vec{u}$ có một thành phần bằng 0 ($y_{\vec{u}}=0$) nên đường thẳng (Δ) không có phương trình chính tắc. ■

6.3. *Cách* 1. *Đổi một ẩn thành tham số* :

- Điểm $M(x;\,y;\,z)\in(\Delta)$ khi và chỉ khi toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y-2z+1=0 \\ x-y-4z-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2z-1 \\ x-y=4z+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+3 \\ y=-2z-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2t \\ y=-7-2t \\ z=t \end{cases}$$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng (Δ). ■

Cách 2. *Tìm lại điểm và vectơ chỉ phương* :

+ Xét hệ $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0 \\ x-y-4z-10=0 \end{cases}$. Cho $z=0$ ta có $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x-y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-7 \end{cases}$

Ta có $M(3;-7;\,0)$ là một điểm thuộc (Δ).

+ Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α), (α') lần lượt là $\vec{n}=(2;\,1;\,-2)$, $\vec{n'}=(1;\,-1;\,-4)$

+ Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{n}\wedge\vec{n'}$. Vậy nên (Δ) có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-3}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{y+7}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-6}=\frac{y-10}{6}=\frac{z}{-3}.$$ ■

6.4. 1) *Cách* 1 : Phương trình ***chính tắc*** đường thẳng đi qua điểm $M(3;\,0;\,-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;\,2;\,-3)$ là $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$. ■

Cách 2 : Phương trình ***tham số*** đường thẳng đi qua điểm $M(3;\,0;\,-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;\,2;\,-3)$ là $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=-1-3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. ■

2) Phương trình ***tham số*** đường thẳng đi qua điểm $M(1;\,-2;\,7)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(5;\,-2;\,6)$ là $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2-2t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=7+6t \end{cases}$. ■

6.5.1) Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;\,1;\,-1)$. Đường thẳng (Δ) vuông góc với mp(α) $\Leftrightarrow$ (Δ) nhận $\vec{n}=(2;\,1;\,-1)$ làm vectơ chỉ phương. Khi đi qua $M(-1;\,5;\,3)$, (Δ) có phương trình là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. ■

2) Đường thẳng đi qua điểm $M(-3;\ 2;\ 1)$ có cùng vectơ vectơ chỉ phương đường thẳng (Δ') là: $\frac{x+3}{4}=\frac{2-y}{11}=\frac{z-1}{9}$.■

6.6$^{(P)}$.**1)** Đường thẳng (Δ) vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;\ 2;\ -1)$, $\vec{u'}=(2;\ -1;\ 3) \Rightarrow$ (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}\wedge\vec{u'}$. Vậy nên khi qua $M(11;\ 9;\ 1)$, đường thẳng (Δ) có mặt phẳng là

$$\frac{x-11}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{y-9}{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z-1}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}} \Leftrightarrow \frac{x-11}{1}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z-1}{1}.■$$

2) Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α), (α') theo thứ tự là $\vec{n}=(3;\ -5;\ 2)$, $\vec{n'}=(2;\ 1;\ 9)$. Đường thẳng (Δ) vuông góc với hai mặt phẳng (α) và $(\alpha') \Rightarrow (\Delta)$ có vectơ chỉ phương là $\Rightarrow$ (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}\wedge\vec{u'}$. Vậy nên khi qua $M(10;\ -9;\ 8)$, đường thẳng (Δ) có mặt phẳng là

$$\frac{x-10}{\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 1 & 9\end{vmatrix}}=\frac{y+9}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 9 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z-8}{\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix}} \Leftrightarrow \frac{10-x}{47}=\frac{y+9}{25}=\frac{z-8}{13}.■$$

6.7$^{(P)}$. **1)** Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}$ hay

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{5-3}=\frac{z-8}{4-8} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{8-z}{4}.■$$

2) Ta có $\overrightarrow{AB}=(5;\ 0;\ 15)$. Phương trình đường thẳng AB là

$$\begin{cases}x=-3+5t\\ y=5\\ z=8+15t\end{cases} \text{hay} \begin{cases}x=-3+t\\ y=5\\ z=8+3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.■$$

6.8$^{(P)}$.**1)** Đường thẳng (Δ) đi qua $A(-1;\ 4;\ -2)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;\ -2;\ 1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua $A'(2;\ 1;\ 5)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}=(1;\ -1;\ 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}=(2;\ -3;\ 5)$,

$$\overrightarrow{AA'}.(\vec{u}\wedge\vec{u'})=1.\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}-3.\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2.1-3.\ 1+5.1=4\neq 0$$

$\Rightarrow (\Delta)$ và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau. ■

2) Mỗi điểm M thuộc (Δ) có toạ độ $(-1+t;\ -4-2t;\ -2+t)$

Mỗi điểm M' thuộc (Δ') có toạ độ $(2+t';\ 1-t';\ 5+t')$.

Vậy nên $\overrightarrow{MM'}=(3+t'-t;\ 5-t'-2t;\ 7+t'+t)$.

Ta có $\vec{u}.\overrightarrow{MM'}=(3+t'-t)-2(5-t'-2t)+(7+t)=4(t'+t)$.

$\vec{u'}.\overrightarrow{MM'}=1(3+t'-t)-(5-t'-2t)+0.(7+t'+t)=-2+2t'+t$.

- MM' là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{MM'}=0\\ \vec{u'}.\overrightarrow{MM'}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t+t'=0\\ t+2t'=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-2\\ t'=2\end{cases}$

Vậy nên $M = (-3; 0; -4)$, $\overrightarrow{MM'} = (7;\ 7;\ 7)$ và phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (Δ) và (Δ') là : $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+4}{1}$. ■

3) Khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') bằng độ dài đoạn thẳng MM'. Do vậy :

$$d(\Delta, \Delta') = \sqrt{7^2 + 7^2 + 7^2} = 7\sqrt{3}.\ ■$$

6.9$^{(P)}$. Xét hai đường thẳng : $(\Delta) : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{3-z}{2}$ (1), $(\Delta') : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ (2)

Vectơ chỉ phương của (Δ) và (Δ') lần lượt là $\vec{u} = (3; 1; -2)$, $\overrightarrow{u'} = (2; 2; 1)$.

Thấy rằng $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{u'}$. (3)

1) Thế (2) vào (1) ta có $\dfrac{2t+2}{3} = \dfrac{2t}{1} = \dfrac{-t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ vô nghiệm. (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow$ (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng chéo nhau. ■

2) Viết lại $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{3-z}{2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Mỗi điểm M thuộc (Δ) có toạ độ $(-1 + 3t; 2 + t; 3 - 2t)$

Mỗi điểm M' thuộc (Δ') có toạ độ $(1 + 2t'; 2 + 2t'; 3 + t')$.

Vậy nên $\overrightarrow{MM'} = (-2 + 2t' - 3t; 2t' - t; t' - 2t)$.

Ta có $\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 3(-2 + 2t' - 3t) + (2t' - t) - 2(t' - 2t) = 6t' - 6t - 6$.

$\overrightarrow{u'}.\overrightarrow{MM'} = 2(-2 + 2t' - 3t) + 2(2t' - t) + (t' - 2t) = 9t' - 10t - 4$.

- MM' là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \\ \overrightarrow{u'}.\overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = t + 1 \\ 9t' = 10t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t' = 6 \end{cases}$

Vậy nên $M = (14; 7; -7)$, $\overrightarrow{MM'} = (-5; 7; -4)$ và phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (Δ) và (Δ') là

$$\frac{x-14}{-5} = \frac{y-7}{7} = \frac{z+7}{-4} \Leftrightarrow \frac{x-14}{5} = \frac{7-y}{7} = \frac{z+7}{4}.\ ■$$

6.10. Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 2)$

Đường thẳng (Δ') có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'} = (2; 1; -1)$

Mỗi điểm A thuộc (Δ) có toạ độ $(t; 2 - t; -4 + 2t)$

Mỗi điểm B thuộc (Δ') có toạ độ $(-8 + 2t'; 6 + t'; 10 - t')$.

Vậy nên $\overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t; 4 + t' + t; 14 - t' - 2t)$.

Ta có $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = (-8 + 2t' - t) - (4 + t' + t) + 2(14 - t' - 2t) = -6t - t' + 16$

$\overrightarrow{u'}.\overrightarrow{AB} = 2(-8 + 2t' - t) + (4 + t' + t) - (14 - t' - 2t) = t + 6t' - 26$

- AB là đoạn vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{u'}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t + t' - 16 = 0 \\ t + 6t' - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow A = (2; 0; 0)$, $B = (0; 10; 6)$. Khi đó $AB^2 = 2^2 + 10^2 + 6^2 = 140$

+ Trung điểm I của AB có toạ độ là $I = (-1; 5; 3)$

+ Phương trình mặt cầu tâm I đường kính AB là $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$

hay $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=\dfrac{35}{2}$ (*)

Gọi (S) là mặt cầu tâm I bán kính R tiếp xúc với đường thẳng (Δ) tại M, tiếp xúc với (Δ') tại N. Ta có $2R = IM + IN \geq MN \geq AB$.

Vậy nên (*) là phương trình mặt cầu phải tìm. ■

6.11$^{(P)}$. ***a)*** Lấy $A(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $3x_1 - y_1 - 4 = 0$ (1)

Điểm A là giao điểm của (Δ) và (α) khi và chỉ khi

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1+1}{3}=\frac{z_1}{1}=\frac{3x_1-(y_1+1)}{3.2-3}=\frac{\overbrace{(3x_1-y_1-4)}^{=0}+3}{3}=1$$

$\Rightarrow$ $(x_1=2; y_1=2; z_1=1)$. Vậy $A=(2; 2; 1)$. ■

b) Ta có vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u}=(2; 3; 1)$,vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(2; 0; 1)$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng (Δ) và vuông góc với mặt phẳng (α). Đó cũng là mặt phẳng đi qua A và nhận $\vec{n}\wedge\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy nên (β) có phương trình

$$\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}(x-2)+\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}(y-2)+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-4z=0$$

- Đường thẳng (Δ') là hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mặt phẳng (α)

$\Leftrightarrow$ (Δ') = $(\alpha)\cap(\beta)$ $\Rightarrow$ Các điểm thuộc (Δ') là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-y-4=0\\ x+y-4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=4\\ x+y=4z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+z\\ y=-1+3z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+t\\ y=-1+3t\\ z=t\end{cases} \quad (1)$$

Vậy (1) là phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mặt phẳng (α).

6.12$^{(P)}$. ***a)*** Ta có $|\vec{u}|=2$, $\overrightarrow{MN}=(-2; 0; 1)$,

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{MN}=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ \sqrt{3} & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{vmatrix}\right)=(\sqrt{3};2;-2\sqrt{3}),$$

$$|\vec{u}\wedge\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{3+4+12}=\sqrt{19}$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) bằng $\dfrac{|\vec{u}\wedge\overrightarrow{MN}|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$. ■

b) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $N(5; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương của là $\vec{u}=(0; -\sqrt{3}; 1)$.

Ta có $|\vec{u}|=2$, $\overrightarrow{MN}=(1; 0; 1)$,

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{M_0M}=\left(\begin{vmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -\sqrt{3}\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(-\sqrt{3};1;\sqrt{3})$$

$$|\vec{u}\wedge\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{3+1+3}=\sqrt{7}$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) bằng $\dfrac{|\vec{u}\wedge\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. ■

6.13$^{(P)}$. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(\sqrt{11}; 0; 0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1; 1; 4)$, vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(3; -1; 1)$.

Khoảng cách từ M đến (Δ) bằng $\frac{|3.\sqrt{11}-1.0+1.0|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = 3$ (1)

Ta có $\vec{u}.\vec{n} = -1.3 - 1.1 + 1.4 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (Δ) // (α) nên có d(Δ, α) = d(M, α) = 3. ■

6.14$^{(P)}$. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 1; 4)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; -1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(4; 1; 3)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (0; 1; -1)$. Ta có : $\vec{u} \wedge \vec{u'} = \left(\begin{vmatrix}2 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 2\\-1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (-2; 2; 2)$, $|\vec{u} \wedge \vec{u'}| = 2\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{MM'} = (3; 2; -1)$, $(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'} = 2.3 + 2.2 - 2.1 = 8 \neq 0$. (1)

Từ (1) suy ra (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u} \wedge \vec{u'}|} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. ■

6.15$^{(P)}$. • Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(3; -2; -5)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

• Xét hệ $\begin{cases}x + 2y - 1 = 0\\ y + z - 2 = 0\end{cases}$. Chọn $y = 0$, ta có $\begin{cases}x - 1 = 0\\ z + 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ z = -2\end{cases}$

⇒ Ta có $M'(1; 0; -2)$ là một điểm thuộc (Δ').

Vectơ pháp tuyến của (α), (α') lần lượt là $\vec{n} = (1; 2; 0)$, $\vec{n'} = (0; 1; -1)$

Vectơ chỉ phương của (Δ') là : $\vec{u'} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = \left(\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (-2; 1; 1)$.

Ta có $\vec{u} \wedge \vec{u'} = \left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{vmatrix}\right) = (-3; -3; -3)$.

$|\vec{u} \wedge \vec{u'}| = 3\sqrt{3}$, $\overrightarrow{MM'} = (-2; 2; 3)$, $(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'} = -3(-2) - 3.2 + (-3).3 = -9$

• Do $(\vec{u} \wedge \vec{u'}).\overrightarrow{MM'} \neq 0$ suy ra (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau và khoảng cách giữa hai chúng là $\frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u} \wedge \vec{u'}|} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. ■

6.16$^{(P)}$. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 1; 0)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3; 0; 1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(3; 2; 1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (9; 0; -3)$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2; 1; 1)$,

Thấy rằng $-3 : 0 : 1 = 9 : 0 : 3 \neq (2 : 1 : 1)$ suy ra (Δ) // (Δ').

Vậy nên d(Δ, Δ') = d(M', (Δ)) (1)

Ta có $\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'} = \left(\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -3\\1 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\right) = (-1; 5; -3)$,

$|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'}| = \sqrt{34}$, $|\vec{u}| = 2$

Theo (1) ta có d(Δ, Δ') = d(M', Δ) = $\frac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{34}}{2} = \sqrt{17}$. ■

6.17$^{(P)}$. Vectơ chỉ phương của (Δ), (Δ') lần lượt là $\vec{u} = (2; -1; 2)$, $\vec{u'} = (2; 2; 2)$.

Gọi φ là góc giữa (Δ) và (Δ'), ta có : $\cos\varphi = \dfrac{|2.2 - 1.2 + 2.2|}{3.2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. ■

6.18$^{(P)}$. Trục Ox vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Đường thẳng (Δ') có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (\sqrt{3}; 0; -1)$.

Gọi φ là góc giữa trục Ox và đường thẳng (Δ), ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{i}.\vec{u}|}{|\vec{i}|.|\vec{u}|} = \frac{|\sqrt{3}.1 + 1.0 - 1.0|}{2.1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0. ■$$

6.19$^{(P)}$. Vectơ chỉ phương của (Δ), (Δ') lần lượt là $\vec{u} = (7; 1; 3)$, $\vec{u'} = (2; 1; -5)$. Để ý $\vec{u}.\vec{u'} = 7.2 + 1.1 + 3(-5) = 0 \Rightarrow$ (Δ) ⊥ (Δ') hay góc giữa (Δ) và (Δ') bằng 90^0.■

6.20$^{(P)}$. Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (2; -1; 2)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), ta có

$$\sin\varphi = \frac{|2.1 - 1.1 + 1.2.(|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0. ■$$

6.21$^{(P)}$. Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (1; 0; 0)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (\sqrt{3}; -1; 0)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), ta có

$$\sin\varphi = \frac{|1\sqrt{3} + 0.1 + 0.0|}{2.1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0. ■$$

6.22$^{(P)}$. Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2})$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (2; -2; -1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α), ta có

$$\sin\varphi = \frac{|2\sqrt{2} - 2.0 - 1(-\sqrt{2})||}{\sqrt{2 + 0 + 2}.\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0. ■$$

6.23$^{(P)}$. ***a)*** *Cách* 1 : Thấy rằng 2 : 3 : 1 ≠ 3 : −3 : 2, điểm $M'(-2; 1; 0)$ vừa thuộc (Δ') lại vừa thuộc đường thẳng (Δ) nên hai đường thẳng ấy cắt nhau.■

Cách 2 : Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0; 4; -1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(-2; 1; 0)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (3; -3; 2)$. Ta có :

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (9; -1; 15) \neq \vec{0}, \ \overrightarrow{MM'} = (-2; -3; 1),$$

$\Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{u'})\overrightarrow{MM'} = 9.(-2) - 1.(-3) + 15.1 = 0$

$\Rightarrow$ (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng cắt nhau. ■

b) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 1; -3)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 2)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(0; 2; 1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (2; 3; -1)$. Ta có:

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-5; 5; 5), \ \overrightarrow{MM'} = (-1; 1; 2),$$

$\Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{u'}).\overrightarrow{MM'} = -5(-1) + 5.1 + 5.2 = 20 \neq 0$

$\Rightarrow$ (Δ) và (Δ) là hai đường thẳng chéo nhau. ■

6.24$^{(P)}$. ***a)*** Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $O(0; 0; 0)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (\log_2 9; \log_3 9; \log_4 9)$. Đường thẳng ($\Delta$') đi qua điểm $M'(1; 1; 1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (\log_2 3; \log_3 3; \log_4 3)$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1; 1; 1)$.

Để ý $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 3} = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 3} = \dfrac{\log_4 9}{\log_4 3} = \dfrac{9}{3} = 3$ nên

$\log_2 9 : \log_3 9 : \log_4 9 = \log_2 3 : \log_3 3 : \log_4 3 \neq 1 : 1 : 1$ nên (Δ) và (Δ') là hai đường thẳng song song. ■

b) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 0; -1)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; -2; 1)$. Đường thẳng (Δ') đi qua điểm $M'(10; 6; 2)$, có vectơ chỉ phương là $\vec{u'} = (-9; 6; -3)$. Ta có : $\overrightarrow{MM'} = (9; -6; 3)$.

Thấy rằng $3 : -2 : 1 = -9 : 6 : 3 = 9 : -6 : 3$ nên (Δ) $\equiv$ (Δ'). ■

6.25$^{(P)}$. ***a)*** Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 5; 7)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 8; -4)$. Ta có $\vec{u}.\vec{n} = 3.1 + 5.8 + 7.(-4) = 15 \neq 0$

Vậy nên đường thẳng (Δ) cắt mặt phẳng (α).

b) Cách 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 0; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; 0)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -4; 1)$. Ta có :

- $\vec{u}.\vec{n} = 4.3 + 3.(-4) + 0.1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$ (1)
- Thay toạ độ điểm M vào phương trình mp(α) có $3.1 + 4.0 + 1.2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng) $\Rightarrow M \in (\alpha)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (Δ) $\subset$ (α). ■

Cách 2 : Thay $x = 1 + 4t$, $y = 3t$, $z = 2$ vào phương trình mp(α) ta có

$3(1 + 4t) - 4.3t + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$. Đẳng thức đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên (Δ) $\subset$ (α). ■

c) Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 2; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -7; 2)$. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 1; -1)$. Ta có :

- $\vec{u}.\vec{n} = 3.3 - 7.1 + 2(-1) = 0.$ (1)
- Thay toạ độ điểm M vào phương trình mp(α) có

$3.1 + 1.2 - 1.2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$ (!), mâu thuẫn., chứng tỏ $M \notin (\alpha)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (Δ) $\subset$ (α). ■

6.26$^{(P)}$. ***a)*** Véc tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (3; 1; 0)$.

Lấy $M'(1 + 3t; 5 + t; 9)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Ta có $\overrightarrow{MM'} = (3t;\ t - 2; 9)$

- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi

$\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \Leftrightarrow 3.3t; - 2(t + 7) + 0.2 = 0$

$\Leftrightarrow 7(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Với $t = 1$ có $M' = (4; 6; 9)$.

Đó là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ). ■

b) Đặt $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{2} = t \Rightarrow \left(x = -2 - t; y = -1 - t; z = 3 + 2t\right)$

Véctơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

Lấy $M'(-2 - t; -1 - t; 3 + 2t)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Ta có

$$\overrightarrow{MM'} = (4 - t;\ t + 1; 2t)$$

- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0 \Leftrightarrow (4 - t) - 2(t + 1) + 2.2t = 0$
$\Leftrightarrow$ $t = 2$. Với $t = 2$ có $M' = (0; -3; 7)$.
Đó là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ).■

6.27$^{(P)}$. a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (1; 1; 1)$
Lấy $H(t; 1 + t; -1 + t)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Ta có :

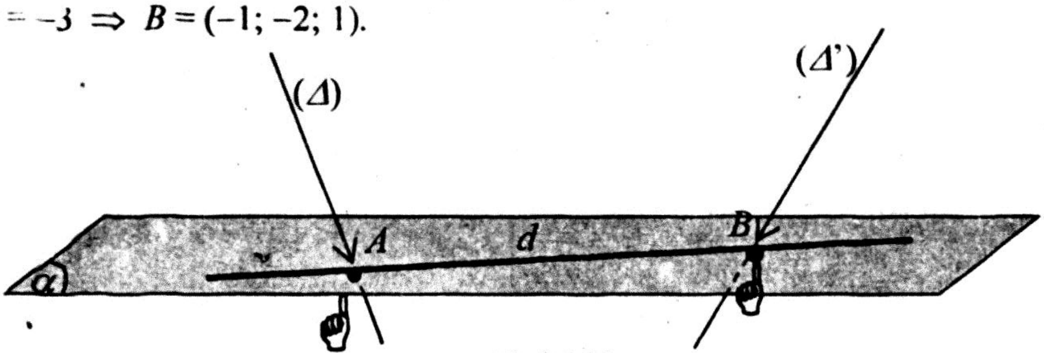
- $\overrightarrow{MH} = (t - 3;\ t + 1;\ t - 1)$.
- H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi
$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow (t - 3) + (t + 1) + (t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Với $t = 1$ có $H = (-2; 2; 0)$
- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi H là trung điểm của MM' $\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 3 = 2.(-2) \\ y' + 0 = 2.2 \\ z' + 0 = 2.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -7 \\ y' = 4 \\ z' = 0 \end{cases} \Rightarrow M' = (-7; 4; 0)$ ■

a) **Vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u} = (0; 1; -2)$**
Lấy $H(2; 1 + t; 4 - 2t)$ là một điểm trên đường thẳng (Δ). Ta có :

- $\overrightarrow{MH} = (-3;\ t - 5;\ 1 - 2t)$.
- H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi
$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow -3 + (t - 5) - 2(1 - 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
Với $t = 2$ có $H = (-3; -3; -3)$
- M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi H là trung điểm của MM' $\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 5 = 2.(-3) \\ y' + 6 = 2.(-3) \\ z' + 3 = 2.(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -11 \\ y' = -12 \\ z' = -9 \end{cases} \Rightarrow M' = (-11; -2; -9)$. ■

6.28.(h.155)• Lấy $A = (1 - t; t; 4t)$ là một điểm thuộc (Δ). Rõ ràng $A = (\Delta) \cap (\alpha) \Leftrightarrow$ toạ độ điểm A thoả mãn phương trình mp(α) tức là $t + 8t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A = (1; 0; 0)$.

- Lấy $B = (2 + t; 4 + 2t; 1)$ là một điểm thuộc (Δ'). Rõ ràng $B = (\Delta') \cap (\alpha')$
$\Leftrightarrow$ toạ độ điểm B thoả mãn phương trình mp(α') tức là $(4 + 2t) + 2 = 0$
$\Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow B = (-1; -2; 1)$.



Hình 155

- Ta có $\overrightarrow{BA} = (2; 2; -1)$.
- Rõ ràng đường thẳng (d) cần tìm là đường thẳng đi qua hai điểm A, B. Ta hiểu đó là đường thẳng đi qua A và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA}$, vậy nên (d) có phương trình :

$$(x = 1 + 2t; y = 2t; z = -t)$$

6.29$^{(P)}$. Lấy $A(1 + t;\ 2t;\ 1 - t)$ là một điểm thuộc (Δ). Ta có $\overrightarrow{MA} = (t + 1;\ 2t - 1;\ -t - 1)$,
Lấy $B(t'; 3t' + 7; 2)$ là một điểm thuộc (Δ'). Ta có $\overrightarrow{MB} = (t' - 1; 3t + 6'; 0)$.

Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t'-1 = k(t+1) \\ 3t'+6 = k(2t-1) \\ 0 = -k(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ k = -3 \\ t = -1 \end{cases}.$$ Với $t = -1$ ta có $\overrightarrow{MA} = (0; -3; 0)$.

Đường thẳng AB được hiểu là đường thẳng qua M nhận $\overrightarrow{MA}$ làm vectơ chỉ phương .

Vậy nên nó có phương trình là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 \end{cases}$. ■

6.30. Lấy $G = (1; -2; 3)$ là trọng tâm ΔABC. Cố nhiên I là điểm cố định.

Với mọi $M \in (\alpha)$ ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}|$ suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị bé nhất $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}|$ đạt giá trị bé nhất $\Leftrightarrow MG \perp (\alpha) \Leftrightarrow M$ là mình chiếu vuông góc của G trên (α).

- Theo *Thí dụ* 24§3 (*chương* III) ta có $M = (5; 0; -2)$. ■

6.31. • Để thuận lợi khi diễn đạt : Nếu A có toạ độ $(x_0; y_0; z_0)$ thì biểu thức $2x_0 - y_0 + z_0 + 1$ được kí hiệu là $f(A)$.

Sử dụng kí hiệu trên ta có $f(A) = 9 > 0, f(B) = -10 < 0$.

Theo kết quả bài 5.28 thì A và B là hai điểm nằm khác phía đối với mp(α).

Lấy $M(x_1; y_1; z_1)$ là một điểm thuộc (α), tức là $2x_1 - 2y_1 + z_1 + 3 = 0$. (1)

a) Ta có $MA + MB \geq AB$, dấu đẳng thức có khi $M = AB \cap (\alpha)$.

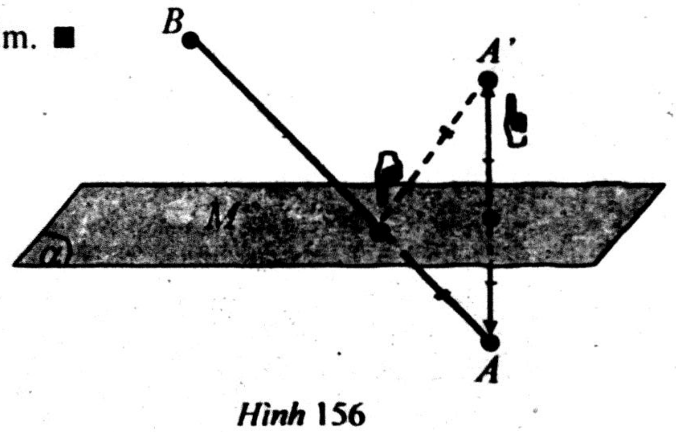
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 6; -2), \overrightarrow{AM} = (x_1 - 1; y_1 + 1; z_1 - 2)$. Khi đó

- Điểm M thuộc đường thẳng AB thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{-3} = \frac{y_1 + 1}{6} = \frac{z_1 - 2}{-2} = \frac{2(x_1 - 1) - 2(y_1 + 1) + (z_1 - 2)}{-3.2 + 6.(-2) - 2}$$

$$= \frac{(2x_1 - 2y_1 + z_1 + 3) - 9}{-20} = \frac{9}{20} \Rightarrow \left(x_1 = \frac{33}{20}; y_1 = \frac{34}{20}; z_1 = \frac{22}{20}\right)$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{33}{20}; \frac{34}{20}; \frac{22}{20}\right)$$ là điểm phải tìm. ■



Hình 156

b) (h.156) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mp(α).

Với mọi điểm $M \in (\alpha)$ ta có $MA = MA' \Rightarrow |MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$, dấu đẳng thức có khi $M = A'B \cap (\alpha)$.

- Theo *Thí dụ* 26§3 (*chương* III) ta có $A' = (-3; 3; -1)$

Ta có $\overrightarrow{A'B} = (1; 2; 1)$, $\overrightarrow{A'M} = (x_1 + 3; y_1 - 3; z_1 + 1)$.

- Điểm M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mp(α) thì $\overrightarrow{A'M}$ cùng phương với

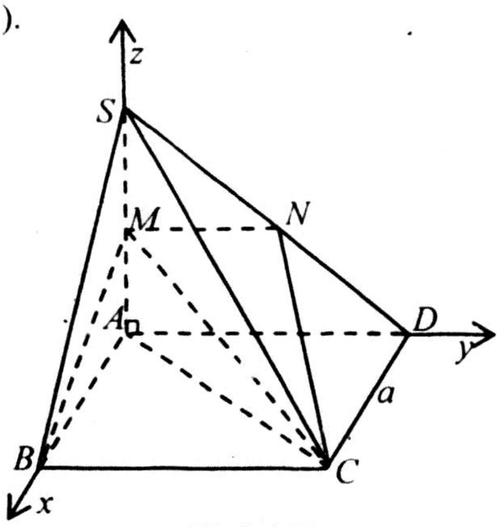
$$\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \frac{x_1 + 3}{1} = \frac{y_1 - 3}{2} = \frac{z_1 + 1}{1} = \frac{2(x_1 + 3) - 2(y_1 - 3) + (z_1 + 1)}{1.2 + 2(-2) + 1}$$

$\Rightarrow \{x_1 = 7; y_1 = 23; z_1 = 9\} \Rightarrow M = (7; 23; 9)$ là điểm phải tìm. ■

6.32.(h.157) Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O là điểm A, tia Ox chứa AB, tia Oy chứa AD, tia Oz chứa AS. Khi đó

$A = (0;0;0)$, $B = (1;0;0)$, $C = (1;1;0)$, $D = (0;1;0)$,

$S = (0;0;2)$, $M = (0;0;1)$, $N = (0;\frac{1}{2};1)$.



Hình 157

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{BM} = (-1;0;1)$

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix}\right) = (1;0;1).$$

Mặt phẳng (BCM) được hiểu là mặt phẳng đi qua B nhận $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy nên nó có phương trình là

$(x-1)+(z-0)=0 \Leftrightarrow x+z-1=0$

Khoảng cách từ A đến mp(BCM) bằng

$\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ■

b) Ta có $\overrightarrow{BS} = (-1;0;2)$, $\overrightarrow{NC} = (1;\frac{1}{2};-1) = (0;1;0)$, $\overrightarrow{BC} = (0;1;0)$,

$$\overrightarrow{BS} \wedge \overrightarrow{NC} = \left(\begin{vmatrix}0 & 2\\\frac{1}{2} & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\right) = \left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$$

$$|\overrightarrow{BS} \wedge \overrightarrow{NC}| = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}, (\overrightarrow{BS} \wedge \overrightarrow{NC})\overrightarrow{BC} = 1.0+1.1-0.\frac{1}{2} = 1$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, CN bằng $\dfrac{\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BS} \wedge \overrightarrow{NC})}{|\overrightarrow{BS} \wedge \overrightarrow{NC}|} = \dfrac{2}{3}$. ■

c) • Ta có $\overrightarrow{SC} = (1;1;-2)$, $\overrightarrow{SD} = (0;1;2)$

Vectơ pháp tuyến của mp(SCD) là

$$\vec{n} = \overrightarrow{SC} \wedge \overrightarrow{SD} = \left(\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 1\\-2 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (0;2;1), |\vec{n}| = \sqrt{5}.$$

Vectơ pháp tuyến của mp(SBC). là

$$\vec{n'} = \overrightarrow{BS} \wedge \overrightarrow{BC} = \left(\begin{vmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -1\\0 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (-2;0;-1), |\vec{n'}| = \sqrt{5}.$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD), (SBC) ta có $\cos\varphi = \dfrac{|-1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$. ■

d) Gọi thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $2V$. Dễ thấy $V_{SACB} = V_{SACD} = V$.

Ta có $\dfrac{V_{SMCB}}{V} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{V_{SMCD}}{V} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

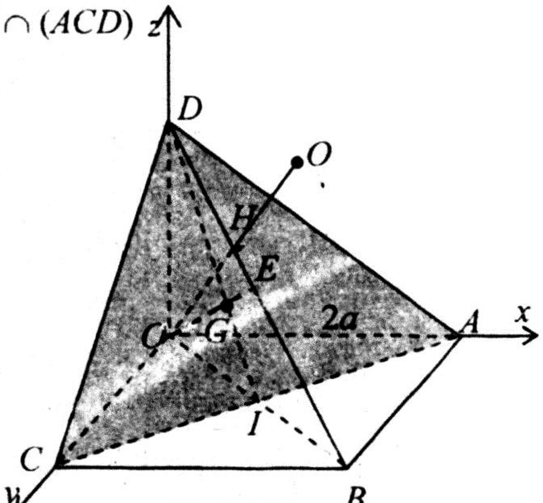
$$\Rightarrow \frac{V_{SMCB}+V_{SMCD}}{V} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{V_{S.BCMN}}{2V} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.BCMN}}{2V-V_{S.BCMN}} = \frac{5}{8-5} = \frac{5}{3}.$$

Vậy mặt phẳng (BCM) chia hình chóp đã cho thành hai phần có tỉ số thể tích bằng $\dfrac{5}{3}$. ■

6.33.(h.158) *Hướng dẫn* :

1) Gọi $I = AC \cap OB$, $G = OE \cap DI \Rightarrow G = OE \cap (ACD)$ và G là trọng tâm ΔACD.

Từ đó suy ra $G = \left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{2a}{3}\right)$



Hình 158

2) $V_{D.OABC} = \frac{1}{3}OA.OC.OD = \frac{8a^3}{3}$

3) $\overrightarrow{DB} = (2a; 2a; -2a)$. Phương trình đường thẳng DB là $\begin{cases} x = 2at \\ y = 2at \\ z = 2a - 2at \end{cases}$

Lấy $H = (2at; 2at; 2a - 2at)$ là một điểm trên đường thẳng DB.

Điểm H là hình chiếu của O trên đường thẳng BD $\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DB} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2(t+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad H = \left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)$

Điểm O' đối xứng với O qua đường thẳng BD $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của OO'

$\Leftrightarrow O' = \left(\frac{4a}{3};\frac{4a}{3};\frac{8a}{3}\right)$ ■

6.34. **1)** Lấy $G = \left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Hình chiếu vuông góc của G trên đường thẳng (Δ) là $H = \left(\frac{24}{7};\frac{16}{21};\frac{25}{52}\right)$. Lập luận như Bài tập 6.29 bạ có điểm H là điểm phải tìm.

2) $V_{OABC} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}$

6.35. 1) Chứng tỏ $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} \neq 0 \Rightarrow ABCD$ là hình tứ diện

$$AB = CD = \sqrt{13}, AD = BC = 5. \blacksquare$$

2) Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm AB, CD. Từ câu 1 suy ra $ABCD$ là tứ diện gần đều $\Rightarrow$ HK là đoạn thẳng vuông góc chung của AB và CD. Vậy nrên HK là khoảng cácg giữa AB và CD. Tính trực tiếp bạn có $HK = 4$.

3) $x^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$. ■

Bài tập trắc nghiệm

66.1$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y - 1 = 2t \\ z - 2 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad (= t)$

66.2$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận: Thay $(x = 1 - t\,;\, y = 1 + t;\, z = 2t)$ vào phương trình mp(α) ta có:

$(1 - t) + (1 + t) - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Suy ra toạ độ giao điểm là $(0; 2; 2)$.

66.3$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **D**

Cách đoán trắc nghiệm : Với $t = 1$, phương trình của (Δ) cho điểm

$M' = (1; 1; 0)$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (-1; 1; 1)$. Vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = (1; 2; -1)$;

$\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = -1.1 + 1.2 + 1.(-1) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{MM'} \Rightarrow MM' \perp (\Delta)$

66.4. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận : Đường thẳng (Δ) di qua điểm $A(2; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 1)$. Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{6}$ =, $\overrightarrow{MA} = (1; 1; 0)$,

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 1; -1); |\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA}| = \sqrt{3}$$

Khoảng cách từ M đến (Δ) bằng $\dfrac{|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ■

66.5$^{(P)}$. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Bổ sung : Thấy rằng $\vec{u}$, $\vec{u}'$ hai vectơ cùng phương và điểm $M' \in (\Delta)$ nên khoảng cách giữa (Δ) và (Δ') bằng khoảng cách từ điểm M' đến đường thẳng (Δ).

66.6. *Trả lời trắc nghiệm* : **A.** *Lời giải tự luận* :

- (Δ) đi qua điểm $A(1; 7; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 4)$
- (Δ') đi qua điểm $B(6; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (3; -2; 1)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; -8; -4)$, $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (9;10; -7)$

$\overrightarrow{AB}(\vec{u} \wedge \vec{u}') = 5.9 - 8.10 - 4(-7) = 0 \Rightarrow (\Delta)$ và (Δ') cắt nhau.

66.7. *Trả lời trắc nghiệm* : **D.** *Lời giải tự luận* :

- (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 2)$
- (Δ') vectơ chỉ phương là $\vec{u}' = (1; -2; 0)$

Ta có $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (4; 2; -1)$

Đường thẳng (d) đi qua M và vuông góc với cả hai đường thẳng (Δ) và (Δ') khi và chỉ khi nó nhận $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ là vectơ chỉ phương. Khi đi qua M, đường thẳng (d) có phương trình là $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời bình: Bạn cần biết :

- *Đường vuông góc chung* của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng cắt và đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng ấy. Đường thẳng vuông góc chung là duy nhất.
- *Đường thẳng vuông góc* với cả hai đường thẳng chéo nhau *không bắt buộc* cắt cả hai đường thẳng ấy.

66.8. *Trả lời trắc nghiệm* : **B**

Lời giải tự luận : Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm trong không gian $Oxyz$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-2; y-4; z+1)$, $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 8)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3t \\ y-4 = -4t \\ z+1 = 8t \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4-4t \\ z = -1+8t \end{cases} \text{ với } 0 \le t \le 1.$$

66.9. *Trả lời trắc nghiệm* : **A**

Lời giải tự luận : Các vectơ chỉ phương của (Δ), (Δ') theo thứ tự là $\vec{u} = (1; 2; 1)$, $\vec{u'} = (-2; -1; 1)$. Gọi φ là góc giữa (Δ), (Δ') ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|} = \frac{|1(-2)+2(-1)+1.1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0.$$

66.10. *Trả lời trắc nghiệm* : **B.** *Lời giải tự luận* .

- (Δ) đi qua điểm $A(1; -1; 2)$ là $\vec{u} = (2; 1; 1)$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là : $\vec{k} = (0; 0; 1)$
- Ta có $\vec{k} \wedge \vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 2; 0)$
- Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (Δ) và vuông góc với mp(Oxy) ⇔ (α) chứa A và nhận $\vec{k} \wedge \vec{u}$ là vectơ chỉ phương. Vậy nên (α) có phương trình là

$$-(x-1) + 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

- Đường thẳng (Δ') là hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(α) khi và chỉ khi (Δ') = (α) ∩ (Oxy). Vậy nên các điểm thuộc (Δ') có toạ độ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}.$$

Đó là phương trình hình chiếu của (Δ') trên mặt phẳng (α).

Bảng kết quả câu hỏi trắc nghiệm
BAI TẬP 6

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
66.1	B	662	A	66.3	D	66.4	B	66.5	B
66.6	A	66.7	D	66.8	B	66.9	A	66.10	B

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN

I. Kiến thức cần nhớ 5

II. Ba dạng toán thường gặp 5

Chương II. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. Mặt cầu, mặt cầu, khối cầu 23

  I. Kiến thức cần nhớ 23

  II. Các dạng toán thường gặp 23

§2. Mặt trụ, hình trụ, khối trụ. Mặt nón, hình nón, khối nón 33

  I. Kiến thức cần nhớ 33

  II. Các dạng toán thường gặp 34

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ toạ độ trong không gian 47

  I. Kiến thức cần nhớ 47

  II. Các kỹ năng quan tâm 48

§2. Mặt cầu 59

  I. Kiến thức cần nhớ 59

  II. Các dạng toán và kỹ thuật cơ bản 59

§3. Phương trình mặt phẳng 63

  I. Kiến thức cần nhớ 63

  II. Các dạng toán và kỹ thuật cơ bản . 65

§4. Phương trình đường thẳng 85

  I. Kiến thức cần nhớ 85

  II. Các dạng toán và kỹ thuật cơ bản 87

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM
HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

	Đề bài	*Hướng dẫn*
Bài tập 1.	19	116
Bài tập 2.	41	131
Bài tập 3.	58	154
Bài tập 4.	62	159
Bài tập 5.	81	162
Bài tập 6.	107	177

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: QUỐC THẮNG

Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: ĐÌNH TÔ

Đơn vị / Người liên kết xuất bản:
Nhà sách HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG HÌNH HỌC 12

Mã số: 1L - 427ĐH2008
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 118 - 2008/CXB/03 – 17/ĐHQGHN, ngày 17/10/2008.
Quyết định xuất bản số: 472 LK - TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2008.